數學傳播　49卷3期, pp. 15-50

什麼是「量子幾何」

王金龍院士

范傳坡教授紀念講座 師範大學理學院 12/04, 2024

非常感謝有機會, 這麼榮幸來到這個場合來紀念范傳坡教授。特別感謝王金平院長蒞臨開幕, 陳界山院長的熱情邀請, 當然還有范傳坡教授的子弟, 不管是下一代, 下下一代, 尤其是范世光博士來成立這個講座。我非常高興能夠受到這個邀請, 特別是因爲這裡是師大, 是教育爲本的學府。在現在這個時代, 我們大家都非常強調研究, 非常強調各種數量、排名, 可是其實沒有任何東西比教育更重要。這些東西沒有強大的教育, 一切都不會開始。在這個知識爆炸的年代, 我們的年輕一代從中學邁入大學, 他們面臨非常大的困難。因爲我們要創造一個非常自由的環境, 讓他們去奔放、去奔跑, 可是這樣的代價就是我們在過去的那種非常強硬的基礎訓練, 勢必要鬆綁、要減弱。所以我們果然看到了年輕的世代天不怕地不怕, 看到就像這次十二強的經典賽, 我們看到這些年輕的國手, 即使是面對最強大的對手, 依然是無所畏懼, 展現他們最好的一面, 因爲他們不怕。在我們傳統的那一代, 我們可能聽到日本, 聽到美國, 聽到這些強大的國家, 即使在數學領域, 我們都會覺得自己矮了一截, 事實上甚至懷疑我們真的有能耐可以做出這些偉大的研究嗎? 我們真的能夠踏上帶動人類發展的那個第一線嗎?

所以我們的教育事實上走向一個非常正確的道路; 但是我們面臨的問題是學生踏入大學的第一天開始, 這些困難的基礎教材仍然是在那裡。他可能在微積分的第一天, 在線性代數的第一天, 他就陷入了困難。所以我常常在各個場合, 包括台大或是師大 (這幾年有機會擔任師大某些校務的委員), 我一直不斷在強調, 沒有任何事情比把所有最強大的資源投入在大學的第一年更重要。我們應該把最好的老師, 最好的助教全部紮在第一年, 因爲當我們能夠把他們很成功地 transit 到大學這個門檻, 讓他們建立了強大的基礎。他們有了興趣, 接下來的東西都是迎刃而解。你給他們任何艱難的題材, 他們回去會讀得很開心, 回來跟你報告, 還可以幫助你。所以這是我非常高興能夠有機會站在師大理學院、師大數學系的這個場合, 來宣揚這個理念。

爲此, 在我接受這個講座的邀請的時候, 我就思考我到底應該要講什麼。我覺得無論如何, 我必須要講我自己真的在做的事情, 當然那是一個現代的研究, 可是我希望可以從我們大家所了解的一些最簡單的現象, 就是我們中學的教育開始。我們中學的教育教我們這些東西, 可是當我們進入大學的時候, 我們常常覺得它完全接不起來。那真的是這樣嗎? 我希望能夠用今天的

這個演講來告訴大家, 它真的不是這樣。這一切的事情其實都是自然相連的。

在我正式演講之前, 跟大家分享一個啟發我做這些教育的一個很重要的故事, 大意是說一個很棒的科學家, 回到家鄉見到他的老母親, 她在家裡等他。他媽媽想要知道到底兒子在外面都在做什麼? 他很想去跟她分享, 可是他怎麼跟他的母親解釋這些困難的科學呢? 他當下就非常非常地痛苦, 他爲什麼沒有辦法來跟她做這個解釋? 事實上我覺得只要我們在做這些研究, 如果是真的精闢到那個程度的話, 我們都是有辦法解釋的。誠如剛剛王院長提到這個量子糾纏, 他所形容的是說, 這個世界上的萬物彼此之間都有你所不知道的關係。我明明知道它們都在糾纏著我們, 但是我們找不到一個很好的物理理論或者是一個數學的理論來解釋這個東西。事實上那是因爲我們科學能力的不足, 並不是這個現象不存在。所以量子幾何, 這到底是在講什麼? 最簡單的一句話就是, 究竟怎麼樣的數學模型, 究竟怎麼樣的數學語言, 有可能爲這個量子的世界提供一個正確或是可用的計算方法或是理論。

幾何學的演進, 我們知道從國中開始, 我們學了古典幾何、平面幾何, 在那邊畫直線, 各種三角形、圖形, 後來我們到了中學, 學了座標幾何, 我們可以做計算。然後呢? 我們慢慢學會射影幾何。在這個義大利學派, 我們就知道必須要加入無窮遠點, 必須要有視角的觀念。然後一直到近代, 我們有微分幾何, 當然最有名是因爲有愛因斯坦的相對論。代數幾何, 這個東西可能就是大家比較害怕的領域。雖然大家知道這個就是在研究多項式所定義出來的解集合的幾何, 但似乎被許多人認爲是令人很敬畏的領域。我剛好就是從事這方面的研究。所以我們來看看這兩個完全不一樣的領域: 微分幾何用的是微積分, 代數幾何用的是代數, 可是它們卻都是在研究幾何。從數學來看, 這是兩個非常不一樣的方法。但是從 1980 年左右開始, 很奇妙的是, 尖端的物理學, 就是我今天會稍微介紹的弦理論, 它提出一種全新形態的一個連結, 使得這兩種幾何事實上幾乎被統一。這個也很接近於在物理上想要達到的統一場論。很奇妙的是, 這些東西它互相有很強烈的關係; 數學影響著物理, 物理也影響著數學。我們來看我們要怎麼來理解這樣的一個發展。

首先我們要先了解, 幾何一切的開始就是只有一件事情: 到底什麼是直線? 這好像很簡單, 其實它非常地不簡單。事實上我們在這個世界上很難找到一條直線; 你覺得它是一條直線, 可是你再怎麼樣, 它就是被萬有引力往下拉一點, 它永遠不會是直的。你一直拉、一直拉, 你可以把它拉得很直, 但其實它就不是直的。無論如何, 在數學上我們究竟是怎麼來理解它呢? 我提供兩個方法來看這個直線。第一個是直線提供我們一個參數化任何一個物件的可能; 所以在這直線上我們給它一個座標, 我們叫做 t。我們想要用這個東西去了解世界上的事情。這是比較代數的做法。如果是比較分析、比較幾何的做法, 你會覺得直線就像一根尺一樣, 上面有刻度, 可以幫你去測量; 那樣的做法就是微分幾何。待會我會提。

直線的意義 (1) 提供參數化

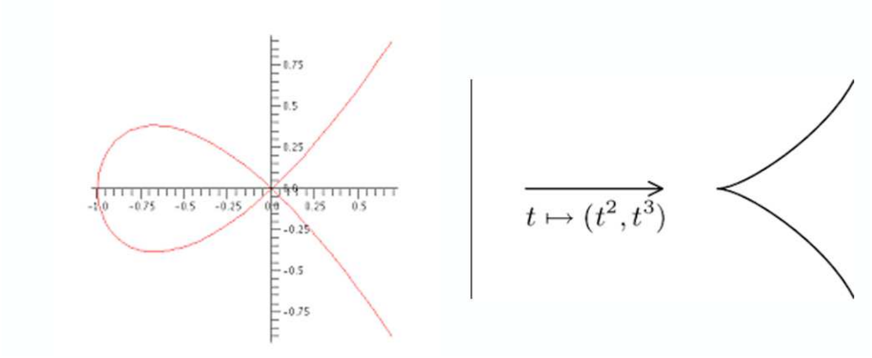
我現在來講的是比較代數的做法, 就是給它一個參數化。譬如說我們都知道, 兩點唯一決定一條直線。這個看起來很 trivial 的東西, 事實上非常 non-trivial。如果我們現在給的是一條二次的曲線, 就是一個二次多項式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 定義出來的曲線。到底要幾個點才能夠決定這個二次曲線呢? 你很簡單就可以發現, 這裡面有 6 個係數, 可是你可以隨便除以一個數, 結果都是等價, 所以它其實只有 5 個自由度。既然有 5 個自由度, 我當然就是要給它 5 個點。所以我知道在平面上, 如果我給你 5 個點, 我應該要能夠解出一條二次曲線。這看起來也很自然。可是不只是如此。你一旦給了這 5 個點, 決定了這二次曲線之後, 事實上你可以把它參數化。這就有點怪了, 因爲這是一個彎曲的東西, 我爲什麼可以把它參數化? 這個就是我們從小學的一個奇怪的辦法。譬如說這個二次曲線, 我們舉一個例子, 譬如一個圓 $x^2 + y^2 = 1$。一個圓上面, 我們可以隨便找一個我們知道的點, 譬如說 $(-1, 0)$, 這我們都會。我們來做一件什麼事情呢? 圓上面的任何一個其他的點 (x, y) 與原來已經知道的這個點的連線斜率爲 $t = \frac{y-0}{x-(-1)}$, 那就是 y 和 x 的關係。我們將這個關係 $y = t(x+1)$ 帶進原來的方程式, 整理一下, 我們發現一個看起來好像是有點複雜的二次方程式 $0 = (t^2+1)x^2+2t^2x+(t^2-1)$。大部分沒有學過數學的人, 看到這個頭就痛了。但是由於 $x = -1$ 是一個 trivial 解, 我們可以利用因式分解把另一個解 x 解出來, 於是就有一個參數式 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$。那 y 是 t 乘以 $x+1$, 於是 $y = \frac{2t}{1+t^2}$。很神奇地, 我們就把這個圓參數化了, 並且是用 t 的有理式 (分式) 參數化。我們給了一個很彎曲的東西, 試圖用直線去描述它, 這個過程是最重要的。

可有理參數化的三次曲線

我們來看, 如果我給你一個三次曲線呢? 三次曲線

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j = 0,$$

你看它有十個係數。十個係數扣掉一個縮放可以不算, 我需要有九個自由度, 所以理論上, 在平面上我需要有九個點, 才能夠定下這個三次曲線。好。可是事實上, 在歷史上, 我們知道三次曲線是無法有理參數化的, 原因是一個我不想在這裡詳細解釋的理論。我們學過複變函數論, 學過一些比較抽象的東西, 學過拓樸, 事實上剛剛說范傳坡老師教過王金平院長拓樸學。拓樸學告訴我們, 一個曲面有一個虧格, 就是它有幾個洞。如果我們把上面這個東西 (三次曲線) 的變數不要放在實數, 而放在複數的話, 它會定義一個曲面, 這個曲面的虧格會是 1。這些理論會告訴我們, 十九世紀的橢圓函數論會教我們, 你不可能把它有理參數化。可是我不想做不能的事情, 我想要做可以的事情。



換句話說, 如果要在什麼情況下它可以被有理參數化, 那一定是特殊的情況。譬如說圖示的這條三次曲線, 它包含了一個奇異點, 譬如說 $(0,0)$ 是一個奇異點, 我們看一個最簡單的情況 $y^2=x^3$, 這看起來好像超級的 trivial, 可是問題是 0 是它的奇異點, 因爲我們知道 $y=x^{3/2}$。它在 $(0,0)$ 是一個尖尖的東西。這個東西有個奇異點, 那有什麼特性呢? 你就真的發現這個參數化太簡單了: $x=t^2$, $y=t^3$。那我們來寫一個稍微難一點的, 譬如說 $y^2=x^2(x+1)$。你想想看, 如果在 x 很小的時候, 這個 $x+1$ 就不用管它。這時候剩下 $y^2=x^2$, 它是兩條線, 就是 $y=x$ 和 $y=-x$。所以它在那裡有個奇異點。有一個奇異點之後, 剛剛的這一招就可以用了。你同樣對它做斜率 y 除以 x, 通過 $(0,0)$ 這一點, 也就是令 $y=tx$ 代入之後, 你會發現你還是可以解出參數化: $x=t^2-1$, $y=t(t^2-1)$。這告訴我們什麼? 你不要固定九個點。你必須只固定八個點; 因爲當你固定八個點的時候, 你會得到一堆三次曲線; 它從光滑的曲線, 被你這個多出來的自由度, 推動到變成有奇異點; 而當變成有奇異點的時候, 你就能參數化它。所以留下一個自由度來導致退化, 比如說 $y^2=x^3+s$, 這是光滑的, 不能被有理參數化。可是當 s 趨於 0, 最後等於 0 的時候, 你就可以有理參數化它。所以這看起來蠻有趣的。

你會面臨下一個問題。當你真的能夠參數化這個東西的時候, 你要問: 請問有多少這樣的可能。這就是大哉問了。這不可能一下子想得到。爲了要提升你的興趣, 我先預告就是, 這就是一個量子現象。爲什麼這樣會是一個量子現象? 因爲我們想要知道一條直線, 它捲曲在某個物體, 它到底繞了多少次? 那剛剛我們講的這個 degree, 這個次數, 2 次或 3 次, 它等價於我在那個地方繞的數量, 它是一個整數, 它是 2, 是 3, 等等。那麼什麼是量子現象? 當我們人類在 100 多年前, 第一次觀測到電子在這個原子的附近, 它產生的行爲遠遠不是月球繞地球的這種行爲。月球或人造衛星繞地球, 你可以把人造衛星擺在任何一個位置, 然後只要給它正確的速度, 它就會繞著地球轉。它不會掉下來, 它也不會跑出去。在這個大的星體裡面, 我們用的是牛頓的引力定律。在這個小的原子核跟電子, 我們用的是庫倫定律。這個定律看起來長得一模一樣, 都是 r 平方分之什麼。但是在這電子的場域, 我們會想像, 難道它真的也是這樣繞嗎?

答案: 不是。因爲根據實驗, 我們在高中裡面都學到, 當你用能量打進這個東西, 只有當你的能量加到某個特定強度的時候, 突然間你會發現電子產生跳躍, 就會出現閃光。然後你再繼續

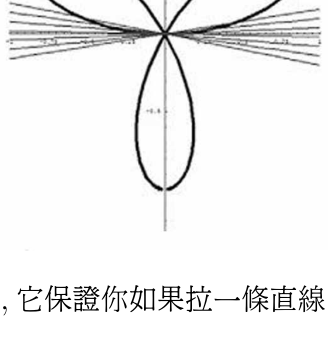
加這個能量, 它會不動, 直到你再加到下一個固定能階的時候, 它又跳了。所以這告訴我們, 在微小的世界裡面, 它的行爲並不是牛頓力學, 它並不是我們原來所想像的這種關係。雖然我們好像有庫倫定律, 但是那是錯的。所以量子力學當然就是這樣產生。而最大的困難是, 到底什麼是它的極致? 什麼是它的數學模型? 用什麼方法我們才可以描述這樣的東西? 當然偉大的海森堡、狄拉克等等大物理學家創造了這個理論。但這不是我現在要講的。我要講的是 100 年後, 我們是怎麼來看這個事情。但無論如何, 先給大家一個觀念: 這個東西其實已經是一個量子現象的開始。而剛剛講了二次、三次這些次數, 它是量子數。但是有了這個量子數還不夠。你還要知道一個很重要的數字: 到底有多少這樣的可能。你能不能算這個東西, 這個才是我們真的要拿來看的: 在這個能階中, 在這個位置裡面, 我們有多少的強度, 或是我們有怎樣的 correlation function, 交互作用函數。再預告一下, 你可以把它想成說, 如果你要討論量子糾纏這種事情, 這就是一種互相牽制的交互作用, 就是你該去算的東西。

無論如何, 即使在這個這麼簡單的, 從中學我們就已經知道了的東西。其實最重要就是說, 你的好奇心夠不夠。就算我們都不知道我剛剛講的這些大道理, 這些抽象名稱, 你都不知道; 你今天就是一個中學生, 你開始看到這個東西, 你會怎麼看這個東西? 如果你只在乎人家要考你的東西, 考試可以考的東西, 那你永遠不會去想我剛剛講的這個問題, 因爲這顯然太困難了。可是如果你好奇心非常地強, 你絕對不會只滿足於說: 所以八個點就好了, 不要九個點, 八個點我就可以讓它退化, 我就可以有個參數化, 你到那個程度可能你算是一個非常聰明的學生, 算是非常有觀察力。可是你要能夠去問像是有多少這種三次曲線這樣的問題, 才能夠成爲一個科學家, 因爲那才表示你真的想要徹底解決這些問題。

我們可以來看, 剛剛說的就是, 本來一條三次曲線, 它應該是沒有奇異點, 但是剛才 $y^2 = x^2(x+1)$, 在 $x = 0$ 有奇異點。唯有當你有奇異點 (singularity) 的時候, 你才能夠把它有理參數化。

例: 四次曲線的有理參數化: $g(C) = 3$

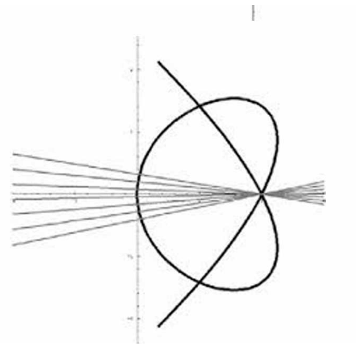
可是真實的故事還沒有那麼簡單。你到底要有多少奇異點? 譬如說我給你一個四次的曲線, 那麼這個四次的曲線它的虧格會是 3, 那更不能參數化。那麼你需要多少個奇異點, 才能把這個虧格壓到 0 呢? 當然, 經過一些學習, 如果我們有抽象理論, 我們會知道該怎麼做。但實際上, 你也不需要知道這些事情。因爲你當然知道, 如果我現在讓它有一個三重奇點, 譬如這個曲線:



$$(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y + y^3 = 0,$$

我們在學極座標的時候, 常常會看到它。這個曲線事實上有三重奇點, 它保證你如果拉一條直線

做斜率, 與這條曲線一定會只有另外一個交點。這個唯一的交點就使得你能夠參數化它。就算你不知道怎麼算, 你也知道答案存在。當然如果經過實際的計算, 以 $y = tx$ 代入, 確實可以解出 $x = \frac{t(3-t^2)}{t^2+1}$, $y = tx$。



或者你也不需要這樣子。也可以更複雜, 譬如說這個情況,

$$y^4 + x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 + 3x^2 - y^2 = 0.$$

它有三個奇點, 每個奇點都只有交兩次, 這也行。這種東西叫做 node, 就是所謂的二重點。如果你有三個二重點, 你一樣可以把這個虧格壓到 0。可是你這時候就很難把它參數化, 因爲你不能從這三個奇點做斜率, 因爲彼此管不到。你拉一條線過去, 會交好幾個點, 所以這無法這樣參數化。那麼你要怎麼做呢? 我們這個小小的技巧, 就是我們中學學的, 或是在微積分裡面學的: 我們用極坐標。當我們發現用極坐標代入, 就得到這個式子

$$r = \frac{1 - 2\cos\theta}{1 - \cos\theta}.$$

你會說: 可是這個不是我要的參數化, 這是 sine、cosine。沒關係, 微積分就教我們, 事實上就是我剛剛秀給大家看的, 一開始對一個圓的參數化。一個圓的參數化, 如果大家記得, 我剛剛是怎麼做的? 我得到這個式子 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$。這式子大家當然都很熟。我們從國中開始就學畢達哥拉斯定理。畢氏整數解就是這樣來的。因爲如果 $x^2 + y^2 = z^2$, 三個都是整數。你把 z 除下來, 它就是有理數。那時候我們就學過。畢氏整數解就是 $n^2 - m^2$, $2mn$, $n^2 + m^2$。所以這些東西其實都是綁在一起的。你一旦知道這件事情, 在剛剛的這個例子裡面, 你做到這樣子就結束了; 因爲做到這樣, 三角函數 $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ 就可以代入參數化 $x = \frac{-t^4+4t^3-3}{2t^2+2}$, $y = \frac{t^2-3t}{t^2+1}$, 就是比較複雜一點而已。你就把它有理參數化。有理參數化, 當然我們知道在微積分的計算中, 是一個非常重要的技術。這個地方分子分母出現的最大次數是 4 一點都不神奇。因爲這是四次曲線。

次數 $d \in \mathbb{N}$ 的平面有理曲線 $C_d \in \mathbb{R}^2$

接下來就是, 要檢驗一個人他想不想要做數學研究, 就是看他想不想要把這種問題推廣: 如果是所有的 d 次的曲線呢? 你知道它總共有多少項? 我們就用組合算一下, $H_d^3 = C_d^{d+2} = \frac{1}{2}(d+2)(d+1)$, 因爲我們取 x 取 y 或是都不取, 所以有三個變數, 然後取 d 次, 我們知道是上述這個組合數。自由度就減 1, 因爲扣掉一個共同的倍數, 所以是 $H_d^3 - 1 = \frac{1}{2}d(d+3)$。這很大, 可是事實上不可能要求這麼多點。我們要允許很多其他的自由度去跑, 才能夠把這個光滑曲線退化成有很多奇異點。奇異點要夠多, 多到把這個虧格壓到 0, 我們才能夠參數化它。理論上是這樣。

但是你也可以直接去想: 如果真的要是能夠參數化, 就用這個參數的分母把它全部通分。所以我把它想成是在一個射影平面。這裡我們第一次看到爲什麼我們要有射影幾何。你可以說我就是不要。但是它只是一個便利; 你在做這些計算的時候, 你如果可以有射影幾何, 你就把它想像你可以把它通分。如果你喜歡有一個幾何的模型, 就把它叫射影幾何。你不喜歡, 就把它想成是一個計算的工具。無論如何, 這時候有理參數化必須長得像 $(x_0(t) : x_1(t) : x_2(t)) \in \mathbb{P}^2$, 而這三個多項式的次數都要小於等於 d, 所以因此它的個數就是 $3(d+1)$。因爲你每個都是只能 t 到 d 次, 包括常數項有 $d+1$ 項, 共有三個。可是你要減掉 1, 就是共同差一個倍數。再減掉 3, 這是因爲有理參數化 $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$ (Möbius); 如果你進行這個動作, 你要把它想成是只是座標變換; 這個東西有三個維度, 因爲 a, b, c, d 除掉一個, 還有剩下三個自由度, 所以正確的做法是

$$3(d+1) - 1 - 3 = 3d - 1.$$

所以這樣我們知道一件事, 在一個 d 次的曲線, 要怎麼樣能夠讓它有理參數化? 我要固定 $3d-1$ 個點。那就回去想想, 看 $d=1$ 的時候, 3 減 1 是 2, 平面固定兩點, 有一條直線。而 $d=2$ 時, 6 減 1 是 5, 所以固定五個點要決定一個二次曲線。然後 $d=3$ 時, 9 減 1 是 8, 就剛好跟我講的一樣。所以你固定八個點以後, 你可以決定一個可參數化曲線。所以這不是太大的問題。我們把這個數字叫做 n_d。正確多少是不重要的, 重要的是你要知道有這麼一個數字。定下這麼多自由度, 你才能夠把這個曲線參數化。

你把它定下來了, 但是真正的問題是: 請問有多少個這樣子的曲線? 有多少個這樣能夠被你參數化的曲線? 這個個數叫 N_d。很不幸的是, 古典幾何與座標幾何, 就是我們剛剛所介紹的, 只告訴我們 $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, 就是一次就是一條。兩次就是一條, 因爲五點決定一條二次曲線。至於三次, 我剛剛至少給你兩個不同的: 一個是有這個尖點, 一個不是這樣子, 所以我們知道它不是 1, 它至少是 2。可是它到底是多少? 我們真的能把它算出來嗎?

量子環 (Quantum Cohomology Ring)

是時候讓我們進到現代的語言了。剛剛講的很多都是我們國高中, 甚至到大一就可以完全理解。我現在直接告訴你它的答案。它的答案是一個非常神奇的做法, 這個東西叫做量子環 (quantum cohomology ring)。首先我們先理解什麼叫做 cohomology 或是 homology。拓樸學研究的, 就是我們看到一個物體裡面有一些洞, 譬如說你看一個救生圈, 中間有個洞, 於是這救生圈它有兩個 circle。這兩個 circle 是沒有辦法再縮小的。一個救生圈, 或是甜甜圈, 有一個大的 circle, 還有一個是旁邊小的 circle; 這兩個 circle 無法被收縮到一個點。這個就是它拓樸的一個特徵。如果以射影平面 $\mathbb{P}^2$ 來講, 更爲簡單, 因爲射影平面裡面就是一個平面加上無窮遠點。它是什麼? 它就是裡面只有點, 然後有線, 再來就是全平面, 這就是它所有的拓樸的生成

元; 因此他的拓樸同調環是

$$H(\mathbb{P}^2) = \mathbb{R}T_0 \oplus \mathbb{R}T_1 \oplus \mathbb{R}T_2,$$

其中 $T_0 = [\mathbb{P}^2] = 1$ 是全平面, $T_1 = L$ 是一條直線, 而 $T_2 := L \cap L = p$ 是一個點。我們來看這個點 p 可以怎麼理解它呢? 它就是兩條線的交點。當我把 L 與 L 兩條線交在一起, 我即使寫同一個 L, 你也必須要把其中一個 L 動成讓它可以正確地相交。這是我們的規定。這樣的東西就是拓樸的乘法。我們理解的是: 在這個拓樸, 譬如剛剛講的甜甜圈, 這一圈與那一圈交接處當然就是一個點。在平面裡面, 我們當然知道兩條直線交於一點。這個就是所謂的古典的拓樸環, 就是你可以把相交想成是一個乘法。

你其實可以做一個更厲害的東西。這更厲害的東西就是: 你把剛剛的 T_1 跟 T_2 做一個 general 的線性組合

$$t = t_1T_1 + t_2T_2,$$

把它的座標叫做 t_1, t_2。然後我們用這個括號 $\langle T_1, T_2, \ldots\rangle_d$ 代表那些通過 $T_1, T_2, \ldots$ 的 d 次有理曲線的數量。像是我們剛剛算過的東西: 在一個平面上, 固定 $3d-1$ 個點, 就會有一個可參數化的 d 次曲線通過它; 我要問說, 這有多少個? 我不知道。我根本不知道有多少。沒關係, 不知道, 我就把它叫做 N_d。我就把這個 N_d 做成一個生成函數。剛剛這個括號只是用來代表我剛剛在定義的數字, 我們做一個適當的線性組合成爲一個生成函數。在數學裡面我們最喜歡做生成函數, 反正把不會的東西全部加起來, 就叫做一個生成函數。好, 那個生成函數長成這個樣子:

$$\begin{aligned}
F(t) &:= \sum_{n\geq 0}\sum_{d\geq 0}\frac{1}{n!}\langle (t_1T_1+t_2T_2)^{\otimes n}\rangle_d\\
&= \sum_{d\geq 0}\sum_{n}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_k^n t_1^k t_2^{n-k}\langle \underbrace{T_1,\ldots,T_1}_{k},\underbrace{T_2,\ldots,T_2}_{n-k}\rangle_d\\
&= \sum_{d\geq 0} e^{dt_1} N_d \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!}.
\end{aligned}$$

他的原因是, 如果你放的是一條線 T_1, 放和沒放是一模一樣的, 因爲任何 d 次曲線都會通過一條線 d 次, 所以這等於是沒有條件。所以這個東西可以完全提出來, 最後加起來是 exponential。可是如果這個東西是一個點, 那麼我要通過一個點, 當然是一個條件。一條曲線要能夠通過一個點, 這是一個強大的條件。所以這時候我就有一個真的不會算的限制條件, 這個東西叫 N_d, 所以我剛剛告訴大家的是, 請問 N_d 到底要怎麼算? 我唯一會的就是 $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, 而 N_3 不等於 1, 如此而已。好, 我現在就來揭曉答案。

答案是這樣子。我們要定義一個東西叫做量子乘法。量子乘法是什麼意思? 就是以原來的古典乘法出發 (亦即兩個東西相交, 看交集的結構是什麼樣子) 然後我們把它加上這個剛剛做

出來的生成函數的三次偏導數, 我把它記做 F_{ijk}。然後做出這樣子的線性組合:

$$T_i * T_j = \sum_k \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial_k} T^k = \sum_k F_{ijk} T^k,$$

其中 $T^k = \sum g^{k\ell} T_\ell$ 爲對偶基底 $(g_{ij} = (T_i, T_j)$ 爲拓樸交點數, 通常稱爲 Poincaré pairing, g^{ij} 爲其反矩陣, 在這個例子裡 $T^k = T_{k-2})$。這看起來有點複雜, 但它說的無非就是: 你加上所有的交互作用函數, 作爲它的修正項。什麼意思呢? 譬如說現在我們三個人在不同的時空點, 三個人完全沒有相交, 可是我們的訊號是相通的, 因爲我們把手機、把我們的社群網站打開來, 我們三個就開始交談了。這句話是什麼意思? 這句話就好像說: 在三個完全不同的點; 我現在製造一顆球, 想像我有一個參數化, 我打進去這個空間, 使得它通過這三個點, 而就透過我這個參數化, 透過我這個直線的影像, 我可以聯絡這三個點。這樣的東西就叫做量子修正, 亦即: 實際上你的古典的實體並沒有相交, 但是透過一種方式, 你認爲你們有交集, 你們互有影響。這樣的東西, 我們叫做交互作用函數。我們剛剛做的事情, 就是把所有的這些交互作用全部加進來。我們說這叫做量子乘法。

可是你要能夠做爲一個乘法, 沒有那麼簡單。我們在數學裡面, 什麼叫做一個乘法? 就是 a 乘以 b 乘以 c。你可以 a 乘以 b 先乘完, 再乘以 c, 你也可以把 b 乘以 c 先乘完, 再以 a 去乘以這個結果。這總是要一樣, 對不對? 這叫做結合率。如果你沒有結合率, 當然是不行。我們剛剛隨便亂定義這樣的東西。你當然可以隨便這樣定義, 可以隨便抓任何一個函數, 隨便像我剛剛這樣定義。可是它會有結合率嗎? 所以我們要問的問題就是結合率。

WDVV 方程

這時候出現了一個偉大的物理學家, 事實上也得過 Fields Medal, 他就是 Witten。Witten 是近代物理學家的先驅, 弦理論裡的重大人物。下面這個方程式叫做 Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde 方程。(其中兩個 Verlinde 是姐妹), WDVV 方程就只講一件事情, 就是剛剛定義的這量子乘法是一個乘法, 也就是它有結合率。以射影平面 $\mathbb{P}^2$ 來講就是:

$$(T_1 * T_1) * T_2 = T_1 * (T_1 * T_2).$$

把剛剛的那個複雜的定義寫下來, 它就是代表這個三次偏微分 F_{222} 等於這個三次偏微分 F_{112} 平方, 減掉這個三次偏微分 F_{111} 乘這個三次偏微分 F_{122}:

$$F_{222} = F_{112}^2 - F_{111} F_{122}.$$

這當然是一個看起來很恐怖的微分方程。這是一個兩個變數的高階非線性偏微分方程, 它是 WDVV equation 的一個特例。一個正常讀數學的人看到一個這樣的方程, 應該不會喜歡它, 因爲 out of any motivation。可是當你知道這個東西的來源, 其實是量子乘法到底是不是一個乘法, 當

然它就突然變得非常有趣而且重要。然後如果你相信了這個方程, 你就真的把它爆開來, 把你剛剛的定義, 不管這個定義是什麼, 反正就是一個用 N_d 做出來的生成函數。當你把它爆開來, 直接計算, 你居然就得到了以下這個遞迴關係式

$$N_d=\sum_{d_1+d_2=d,d_i>0} N_{d_1}N_{d_2}(d_1^2d_2^2C^{3d-4}_{3d_1-2}-d_1^3d_2C^{3d-4}_{3d_1-1}),$$

也就是 N_d 會等於什麼呢? 會由比較小的 N_{d_1},N_{d_2}, 使得 d_1+d_2 是 d, 然後後面有一大堆組合數, 還有一些 d_1^2,d_1^3, 反正 anyway 就是比較小的來決定。故事已經結束了; 因爲這個事實就告訴你: 不管它多複雜, 你其實只要知道第一項就可以了。N_1 就會決定 N_2, N_2 就會決定 N_3。我們就試試看, 如果 $d=2$, d_1 及 d_2 就只能等於 1。那是你剛剛會的。它就是 1×1。然後你算一下括號內的數, 剛好是 $2-1$。所以這樣就算出來, N_1 是 1 的話, N_2 也是 1。N_3, 很抱歉, 剛剛我們不知道是多少, 我們剛剛寫了兩個例子, 其實它是 12。然後你繼續算, 就會算出 N_4 是 620, N_5 是 87304。這樣就告訴你, 這就是我們所謂的交互作用。到底誰在交互作用? 不要忘記, 當你的 degree 是 4 的時候, 你需要有 $3d-1$, 就是 $3\times 4-1$, 就是 11 個點; 所以這個數字 620 代表的是那 11 個不同的位置的交互作用。

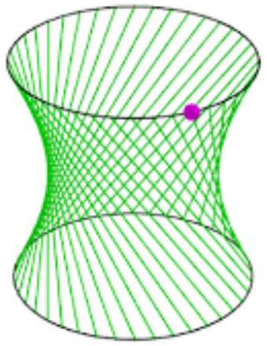
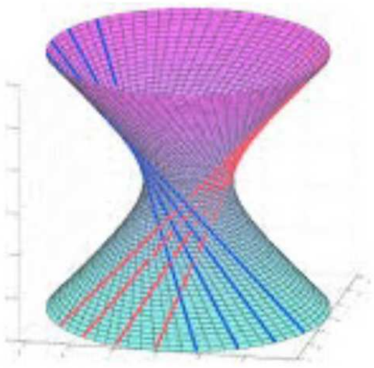
這個東西 (量子環) 是被物理先發現。我待會兒會告訴你, 物理怎麼發現這件事情, 這樣我們就會進到物理上是怎麼看這種事情。當然, 無論如何, 當時他們提出這個的時候, 數學家是非常震撼的, 因爲在數學上, 在1990 年之前, 從來沒有任何人相信會有這種東西。1980 年到 1990 年, 是一個非常黃金的年代, 它是一個近代的數學跟近代的物理重新交會的一個黃金年代。上一次這樣子, 就已經是追溯到 1900 年到 1910 年, 那時候是量子力學跟廣義相對論的開始。後來在漫長的歲月中, 數學與物理各自進行它們自己的發展。直到 80 年代之後, 重新找回了我們現在所謂的量子幾何的基礎。當然不是只有我舉的這種例子, 但是它的形式, 大致上像這樣。嚴格的數學, 是大概經歷五、六年之後完成。其中有很多都是我的師兄弟, 在裡面參與了很多的工作。在丘成桐教授的學派裡面, 我們做了很多的工作。當時這些東西在做的時候, 剛好是我在讀博士的時候。

二次曲面 $S_2\in\mathbb{P}^3\ni(x:y:z:w)$

我們剛剛講的是平面。我告訴你的就是, 平面上面點之間的這種曲線, 到底什麼時候有多少個。但平面太簡單了。我們現在開始把我們的想像力再擴充一點。我們在中學裡面可不是只有學平面, 我們還有學二次曲面, 我們還有學圓錐, 我們還有學橢球等。我們現在開始來看, 這上面會有直線嗎? 這上面會有二次曲線嗎? 我們可以開始問同樣的問題, 所以我們先把我們的目光放到二次曲面。最簡單的二次曲面, 比如這是它在 $\mathbb{R}^3$ 的部分,

$$S:x^2+y^2=z^2+1.$$

爲什麼特別寫這個呢? 當然二次曲面最簡單的是球, 橢球, 顯然它們上面沒有直線。所以我現在寫一個會有直線的, 你把 z^2 移過來的話是差負號, 但我們把它改成正係數。先給大家看一下它的圖長什麼樣子。

這是我們在中學裡面會畫的圖, 對不對? 我們真的去畫。事實上我們教微積分, 一天到晚都在畫這種圖。可是這個圖, 它真正厲害的地方是在哪裡呢? 這上面有很多線, 就像我們很多外面的店去逛的時候, 常常看到那種藝術品, 比如你現在想像你拿著一坨筷子把它全部扭曲, 你就發現到這整個東西被你轉一下, 每一個筷子變成斜的, 可是它還是構成一個旋轉體, 而這就是剛剛那個方程式的圖形。它到底有多少線? 你相當於拿著一條線繞一圈, 你能夠這樣做; 這是對稱, 所以你就可以拿另外一邊, 另外一邊也有一條線, 它就繞一圈。換句話說, 在這個圖裡面, 你發現一個很神奇的事情是: 剛剛我們在平面上, 通過一個點有多少直線? 有無窮多條, 通過兩個點才有一條直線。可是在這個例子裡面則不同。這個例子裡面是, 通過一個點, 能有幾條直線? 兩條。任何一個點, 你就只有這邊一條, 那邊一條。我們就發現這個曲面, 跟平面非常地不同, 我們是要限制一個點, 可是限制只要一點就夠了。限制一個點之後, 你得到有限的直線, 兩條。那這個就是我剛剛在描述的這個曲面 Veronese ruled surface, 你如果真的要給它參數化, 你也可以做得到:

$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{r}(s) + t(\mathbf{r}'(s) \pm e_3) = (\cos s \mp t \sin s, \sin s \pm t \cos s, t);$$

這邊有 sine、cosine。可是我剛剛已經講過 sine、cosine 都可以用有理式參數化, 因此 $S \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{P}^3 \supset S_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。無論如何, 這樣的一個曲面, 固定一個點有兩條直線通過。

神奇的是, 我剛剛講的那個 WDVV 這套東西, 就是所謂的量子環, 即使換成這個曲面它也是對的。只是這時候它的拓樸比較複雜, 因爲我們剛剛看到: 這個曲面真實的樣貌, 相當於是兩條直線去乘起來, 所以它兩邊各有一個生成元, 各有一條直線, 我把它叫做 L_1、L_2, 然後 L_1、L_2 交於一點 P, 因爲通過一點剛好有這兩條直線, 所以

$$H(S) = \mathbb{R}[S_2] \oplus \mathbb{R}L_1 \oplus \mathbb{R}L_2 \oplus \mathbb{R}P.$$

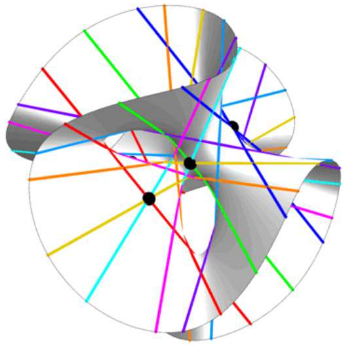
所以它有一個古典的乘法。可是同樣地我們也可以問: N_d 等於多少? 在剛剛這個圖裡面 $n_1 = 1$, $N_1 = 2$, 你很容易問你自己, 譬如說 n_2 等於多少? 你要多少點才能夠得到一條二次曲線? 當然這個例子特別簡單, 因爲我們從小在學圓錐曲線: 如果你今天拿一個圓錐, 我們都知道一個平面截下去, 就得到一個圓錐曲線, 因爲這個圓錐是二次定義的, 所以一個平面截下去, 一定還是二次的。可是要幾個點才能夠決定這個平面? 需要三個點。所以 $n_2 = 3$, 因爲 3 點定義截面, 而你就只有一個截面截下去, 就只有 1 個曲線。所以我們知道在這個例子裡 $N_2 = 1$。可是我如果再問你下面的, 你大概就沒辦法了; 請問有多少個三次曲線掉在這上面? 你要限制多少個點, 算出它是有多少個可能? 四次曲線呢? 那這些看起來就很困難。但是, 同樣地, WDVV 方程也把它全部算出來了, 因爲你一樣會得到遞迴式。

三次曲面上的 27 條直線 $S_3 \subset \mathbb{P}^3$

我們現在已經看到量子環很厲害。它告訴我們: 其實不管你今天要打到哪裡, 最重要需要決定的是什麼? 有多少線。一旦能夠知道怎麼決定一開始的初值條件, 量子環就把後面全部生產出來。我們現在看第一個非常 non-trivial 的例子。這非常有名。大家看這就叫做三次曲面, 舉例來講, 譬如你寫一個這樣的東西,

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3.$$

這個三次曲面, 其中一個變數, 你要把它設成 1, 因爲我這放的是射影空間。如果你要放在三度空間, 歐式空間 $\mathbb{R}^3$, 這邊就要取一個座標是 1。



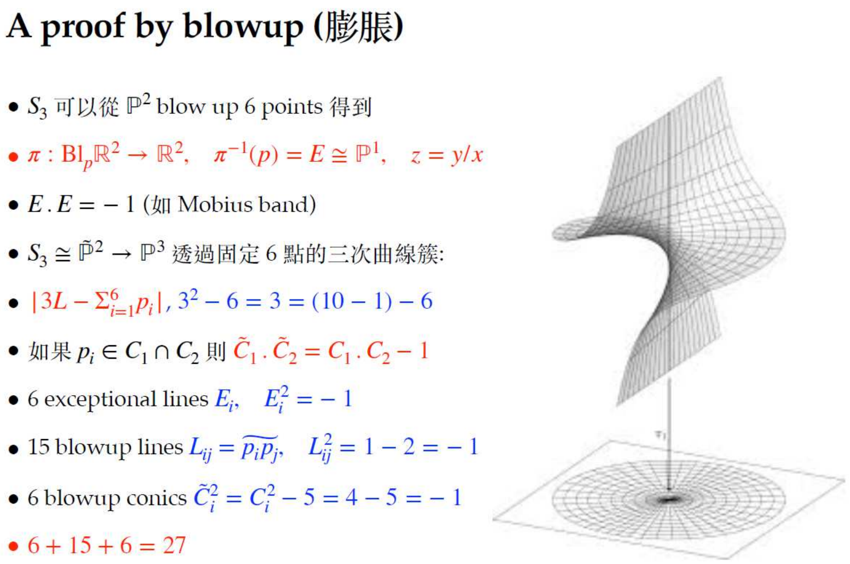
這個圖, 我想沒有任何人有辦法用手畫。我也做不到。但是你上網路去搜尋一下, 你就會看到這個很可愛的圖。這是這個曲面在三度空間的圖形。它最神奇的是, 你盯著它看, 這個曲面非常地扭曲, 裡面有很多洞, 但是它裡面有 27 條線, 剛剛好 27 條。也就是說, 在這個圖裡面, 你要得到線, 你不用限制任何條件, 它就是 27 條線, 你不可以限制任何條件, 因爲你限制那條件, 萬一不在那個線上, 就沒有了。這個是一個非常有名的東西, 它是被義大利幾何學派所發現。我

這邊列出三個人, Castellnouvo、Enrique, 萬一你開始學代數幾何, 你就要學他們兩個的理論, 學很久, 還有 Zariski, 這是交換代數最偉大的人物, 把義大利的整個代數學派帶到 Harvard。Zariski 就是 Harvard 的整個代數幾何學派的發起者。實際上整個美國的代數幾何, 幾乎都是他的徒子徒孫。他開創了所謂的雙有理幾何學。可是一直到 1990 量子環被發現前, 在這個長久的過去中, 我們用傳統的數學能夠算的 N_d 只有極少數, 我們只能夠做非常少的前面幾項。可是量子環讓我們計算所有的。以這個例子來講, 你只要知道如何得到這 27 條線。

(有聽衆提問: 如何看出 27 條?)

這很難看得出來, 他們當初是觀察出來的。如果你要真的證明, 我其實寫了一個證明, 但是我不會講這個證明。如果我們今天去學了一個代數幾何的課, 比如說我們代數幾何有個很有名的書作者是 Hartshorne, 這本書算是經典的難書。你很努力地把它學到第五章, 快到那本書最後面, 你就會發現有我寫的這個證明。這個證明我不會仔細跟你講, 我只告訴你它用到的觀念叫做爆破或叫做膨脹, 英文就是 blow up。這個動作是什麼呢? 就是一個點在這裡, 我看這個點的時候有很多方向。像我在做極坐標, 如果我想要把每個方向都當作不一樣的點, 我就必須要把所有的這些方向都加進去。就像我們在逛那個店面很小的商店, 它會做那種旋轉梯, 從一樓走到二樓就這樣繞, 對不對? 那個動作就叫做 blow up, 因爲它就是把這個階梯一直提上去, 但是一直轉。所以這個新的 Z 軸代表斜率, 然後這時候你就把每一條線拉上去, 這個動作叫做 blow up。那這個 blow up 的技術可以幫助我們證明剛剛這個 3 次曲面有 27 條線。不過我不詳細解釋這個東西, 有興趣的, 反正這個 PowerPoint 留在這裡。

雙有理幾何學 (birational geometry) 是代數幾何的一個重要的分支, 到今天都非常地 active, 但是它仍然有它一定的極限。古典的代數幾何還是有一定的極限。



直線的意義: (2) 幾何 = 測量

我們現在進到直線的第二個意義: 測量。我剛剛講的是參數化。我現在要講的是另外一個我們平常以爲的直線, 不是我剛剛講的。我們平常以爲的直線就是幾何上的一條最短的、光所走的路徑。如果你這樣看, 那麼你在講什麼? 你在講最小作用原理。所謂的直線是什麼? 是在一個系統中, 不管是什麼, 我就是要看它最快到達的那個路徑。這個東西, 即使它看起來不直, 你也把它叫做直線。這句話是什麼意思? 這句話就是, 因爲其實我們對於直線這個東西的概念, 在真實的世界裡面不是真的存在。直線必須要依賴於你到底要測量什麼東西; 而那個東西, 當它達到最小的時候, 那個軌跡我們就說它是直線。這樣的觀念, 當然一開始聽起來很奇怪, 可是現在大家都接受了, 因爲這就是愛因斯坦的講法, 愛因斯坦講說時空是彎曲的。廣義相對論它用這樣的觀念成功解釋了一些觀測, 像是水星近日點的反常軌道, 以及光在重力場中的偏折現象。光走的是最短距離, 我們就把這個路徑叫做測地線。我們現在直線在幾何的講法就是測地線。反過來, 你也可以用這些直線的結構來瞭解時空。這是廣義相對論。我等一下會把這個方程式寫下來。愛因斯坦進行這樣的一個做法的時候呢, 事實上他發現這樣子的數學理論早就存在了, 有異於量子力學。量子力學被發現的時候, 沒有相對應的數學理論, 所以相對應的數學理論是同時發展。可是在愛因斯坦這個例子, 事實上高斯在 19 世紀的 1815, 黎曼在 1855, 就已經知道愛因斯坦所需要的這個東西, 亦即我們現在所謂的微分幾何。微分幾何它的出發點就是畢氏定理; 要測量平面上或空間中的距離, 就是要有畢氏定理。可是你現在把畢氏定理扭曲, 讓這個 x^2+y^2 加上交叉項, 然後在每個不同的點給它不同的 weight:

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2.$$

這給了你測量距離的方式。一旦有這個式子, 你就可以用微積分去算距離。

在這個情況之下, 高斯發現一個非常重要的觀念叫做曲率。這個曲率也很容易了解, 就像我們在爬山, 我很喜歡解釋: 法向量是什麼? 你登山隊的領隊拿著一根柱子。那個地方如果很彎曲, 稍微在下面走一塊小小的地方, 那個柱子就掃出一塊很大的範圍; 如果那個很平, 那個柱子指向的範圍就從來不動, 對不對? 所以我們知道, 法向量所掃出來的範圍, 去除以你原來底部的範圍, 這個極限就叫做高斯曲率:

$$K = \frac{dN(A)}{dA}.$$

這個非常有名。大家知道高斯發現這個東西, 是當他在做德國的地理觀測, 因爲他被派去測量這個德國的地形。那邊有很多很多的山, 而他需要做一個精確的測量, 所以他發現必須要引入這個曲率, 然後證明了著名的高斯-博內定理, 我們在大學裡面會學的。不過重點不是這個。我要告訴你的重點是, 我怎麼知道我的空間有沒有彎曲? 我如果不拿一根柱子, 沒有一個法向量, 對不對? 有一個很簡單的方法是這樣, 你只需要用距離的測量, 就可以知道空間有沒有彎曲。你去算一個圓的長度。你現在畫一個圓, 比如說我們在地球上, 我爲什麼知道地球是一個球, 不是平

的? 你把你的半徑拉得很遠, 然後去畫出一個很大的圓弧, 真的去測量這個圓弧的周長 $C(r)$, 當然你在地球上, 你知道, 因爲地球是往下凹的, 所以長度會比較小, 它不會是 $2\pi r$, 它會向下陷一點。這陷下去的 size 是多少? 它跟你真正的歐式的距離, 大約就是差 $K\pi r^2/3$

$$C(r) = 2\pi r - \frac{k\pi r^2}{3} + \cdots\ ,$$

後面還有誤差項。從這個展開式, 你就知道曲率可以從測量中讀出。通常這會是我在大三幾何的期中考或期末考一定會考的, 因爲這個很重要。它讓你知道說東西其實就是完全被測量所決定。

高維度空間 pseudo-Riemannian geometry (M, g), dim $M = n$

可是高斯只做了曲面的情況。研究這個宇宙, 我們最少需要四個變數, 需要三個空間座標跟一個時間座標, 我們需要至少四個變數。黎曼提供了一個任何多變數的計算方式。這時候我們就是把剛剛的計算弧長的前面的係數, 把它叫做 g_{ij}。它不一定要正定。如果正定, 當然是數學上比較喜歡的, 但是如果你今天要做物理, 因爲時間的前面是要被放負號, 所以這時候我們通常叫做 pseudo-Riemannian, 但基本上沒有什麼差別。

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j.$$

工具是差不多的。當你使用一個很特殊的座標系在一個點, 去計算體積的密度, 如果它是歐式, 那當然它就是 1, 黎曼最了不起的發現就是, 一般來講它不會是這樣子。而是

$$\sqrt{|\det(g_{ij})|} = 1 - \frac{1}{6} R_{ij} x_i x_j + \cdots\ ;$$

它的泰勒展開式的第二階項會有一個係數跑出來, 是一個矩陣, 我們現在稱 R_{ij} 爲 Ricci tensor, Ricci 張量。它很複雜, 因爲他是來自泰勒展開式, 是由原來的計算距離的這個矩陣 g_{ij} 的二次偏微分所構成。黎曼了不起的是, 在他寫下這個東西的時候, 沒有任何計算這個東西的工具, 亦即沒有 tensor calculus, 而黎曼直接寫下這個東西是什麼, 因此我們今天叫它做黎曼的曲率張量。黎曼曲率張量的一個比較小的部分, 就是我現在寫的這個 Ricci tensor。無論如何, 如果你把這個矩陣再 take trace, 也就是把它取對角線加起來, 這個東西叫做純曲率

$$R = \sum g^{ij} R_{ij}.$$

現在我可以寫愛因斯坦的方程式。我通常演講的習慣是, 雖然是一個通俗的演講, 可是還是要講對的東西, 還是要講真的東西。它的方程式是

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}.$$

這個曲率與你原來測量距離的方式之間, 依循一個關係式, 兩者互相結合。差距是什麼呢？ 這個 T_{ij} 是描述空間中的能量分布所謂的 energy stress tensor, 亦即能量應力張量; 這個東西的精確意義我們在此不去管它, 它是一個物理量。譬如說以宇宙來講, 它是由你觀測到的星球的密度, 以你觀測到的這些東西的能量的分布所決定。爲什麼我要去特別講愛因斯坦這個方程？ 因爲愛因斯坦這個方程式導出來的時候, 事實上你並不需要假設空間的維度是四維。雖然我們認爲空間的維度是 $3+1=4$, 可是導出這個東西的方法, 完全不需要這件事情。它對任何維度都是一樣的。這就給出一個很奇怪的事情: 相對論裡面並沒有絕對地限制你的時空是四維。當然, 無論如何, 在四維的時候, 愛因斯坦的這個式子讓天文學家發現一件事情: 根據我們對天文的觀測, 在任何一個位置的星體的密度似乎是均勻的。這件事情會告訴我們, 這個矩陣 T_{ij} 似乎會漸近於原來這個 tensor g_{ij} 的一個正倍數:

$$T_{ij} \sim \lambda g_{ij}, \quad \lambda > 0.$$

一旦有這樣的觀察之後, 你學過一些微分幾何, 學過一些張量分析, 就可以證明空間方向的這個矩陣 $\big(R_{ij}(x)\big)_{3\times 3}$ 是正定, 而且它的特徵值會大於 λ。我講這個, 至少會讓你想要學微分幾何 (如果你會因此想學微分幾何的話)。而這就是在最早的時候我們爲什麼相信宇宙是封閉的。我爲什麼知道球會封閉？ 因爲曲率恆正而且不趨近到 0, 它有一個比 0 還要大的彎曲的程度, 所以從地球一個點出發, 最終會把它 close up。經過測地線變分法或者是直觀, 當你的曲率是正的, 而且是大於某個恆正的常數, 就像地球一樣, 我們就得到宇宙的封閉性。

我們一開始不知道宇宙到底是長什麼樣子; 宇宙到底是像一個歐式空間, 無限地延伸, 還是像地球一樣, 走一走會走回來？ 我們其實不知道。所以在有這樣的愛因斯坦方程式之後, 一大票的天文學家跟物理學家傾向於相信宇宙是封閉。可是宇宙是封閉, 會造成很恐怖的事情, 因爲如果宇宙真的是封閉, 會導致 $\cdots$

大爆炸-黑洞-弦理論 (String Theory)

這就是著名的 Hawking 霍金的觀察。因爲愛因斯坦的方程式的其中一個座標是時間, 而那個方程式把時間 t 換成 $-t$ 仍是不變。換句話說, 愛因斯坦的方程式可以倒著逆推, 你的時間可以往後走。如果你的空間是封閉的, 像球一樣, 時間就可以往後推。根據天文觀測宇宙似乎隨時間增加而膨脹。但這不就表示當時間往後推它最終要有一個起點很小很小嗎？ 這樣就預測了, 你好像應該要有大爆炸。似乎宇宙是從一個很小的地方爆發出來的。可是當然很多人不相信這種事情。我相信很多人都覺得這都是你們亂講。但問題是, 在理論上你要怎麼排除這種事情？因爲如果你相信愛因斯坦的方程式, 然後你相信這個宇宙是光滑的, 它真的就是要這樣。除非這個宇宙, 事實上存在 singularity, 存在奇異點。如果你解愛因斯坦方程會出現奇異點, 我們就叫這個奇異點爲黑洞。這是黑洞的一個比較粗淺的理解。

可是有黑洞, 又有新的問題產生了。因爲從我們開始學物理以來, 我們都相信電磁力比重力大非常非常多。重力很小, 重力需要很大很大的形體, 才能夠互相影響。可是電磁力只要非常小的東西, 互相影響就很劇烈。可是那是因爲你在正常的空間中, 它是平坦的, 沒有彎曲。如果你現在相信空間是彎曲的, 有黎曼幾何, 所謂的曲率的概念, 那麼愛因斯坦的方程出現奇異點, 是什麼意思呢? 這就表示曲率會爆炸, 曲率跑到無窮大。可是當你曲率跑到無窮大的時候, 重力的現象本來很小很小, 突然間它就變得很大很大, 因爲你的曲率非常大。這時候你的重力所造成的影響, 跟你的電磁力所造成的影響, 它互相就有關係, 它們的 scale 幾乎接近。所以當真的能夠有 singularity, 真的能夠有黑洞的時候, 我們必須要一個新的理論, 就是量子重力場論, 也就是所謂的 quantum gravity。本來這兩個東西是完全無關的, 可是如果要研究黑洞, 就必須要有這樣一個新的量子場論。

現在問題就來了。它的數學是什麼?quantum gravity 是從很久很久以前, 事實上從 40 年代就已經開始了, 有很多很多嘗試去做這樣的東西的方法, 但是一直都有各式各樣的問題, 有一些小成功, 有一些失敗。到目前爲止, 一個能夠提出最合理解釋的東西, 雖然很多物理學家仍然不接受, 就是我接下來要講的弦理論。它有它的問題。我今天也不是要幫物理學做任何的辯解, 所以我沒有爲這個負任何責任。我現在只是在解釋, 透過這樣的物理, 它跟數學產生了什麼連結, 數學可以告訴物理什麼, 物理可以告訴數學什麼。至於那個物理的理論是不是正確, 那是完全是物理學家要去負責的, 因爲他們必須要去吻合他們的實驗及觀察。

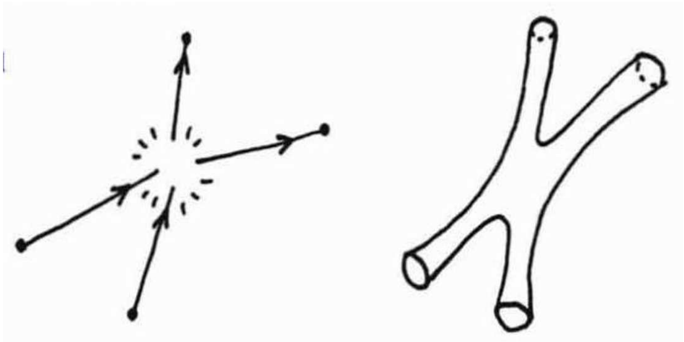
無論如何, 這個理論開始於 1968 年, 我特別把它寫出來是因爲我就是這一年出生的, 所以我很開心。在一個很細小的空間中, 很細小的位置裡面, 我們知道有核分裂, 是原子彈的基礎, 可是問題是, 有正電的這些粒子, 包在一個這麼小的原子核, 會違反所有的定律, 因此必須要有一個更強大的力量去把它綁在一起。這個東西叫做強作用力。1968 年, Veneziano 描述原子核強作用力時出現了這樣的一個數學式

$$B(x+y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

這是我們在學複變會學到的 gamma function $\Gamma(x)$, 以及在學微積分時會學到的 beta function $B(x)$。你不用去管它是什麼, 它都是類似這樣定義。重點是這個式子到底告訴我們什麼? 這告訴我們很像是一個乘法結構的關係。它很像我剛剛所解釋的, 兩個位置的交互作用函數。當時解釋這個現象的方法雖然無法建立在既有的理論上。可是這個解釋的方式, 被發現也可以用來描述很小的彈性體, 很小的線段的震動體, 它的震動模式也可以用類似的這種函數來解釋。這是歷史上最早出現的這種解釋。會不會我們的任何一個質點, 其實根本就不是質點? 說句老實話, 我們也不知道質點是什麼。會不會我們任何一個質點其實都是一個很小的弦在震動, 因爲其實我們也不知道。然後我們各種不同的物質, 是對於這個很小的弦的不同的震動態。這就是一開始的弦理論。有這樣的想法的時候, 會非常的棒, 爲什麼呢? 因爲 particle 就變成弦。string 可以是一個 interval 的 image, 或者是一個 circle 的 image (如果是封閉的弦)。一個東西運

動的軌跡就很有趣了。一個東西在運動, 依循我們所謂的最短路徑, 最小作用原理。如果它現在是一個 string, 它掃出來的是一個曲面, 對不對? 它會掃出空間中的一個曲面。

這個理論最棒的事情是, 它可以用來解釋兩個粒子碰撞。如果兩個粒子碰撞, 到底會發生什麼事情? 難道是發生 singularity 嗎? 兩個粒子撞在一起, 不是應該要有 singularity 嗎? 可是你又沒看到任何 singularity。這世界上所有的東西到處都在碰撞, 從來沒看過任何 singularity, 沒有看到什麼火花, 對不對? 所以你一旦是接受了這種講法以後, 就出現這個圖,



就是粒子在碰撞的時候, 其實以弦的觀點, 它構成一個光滑的曲面。在這個空間中, 它的軌跡掃出一個光滑的曲面。這樣就有一個方式來解釋你不會看到那些 singularity, 不會看到那些數學上應該要出現的無窮大。

不但如此, 這個圖事實上在物理上可以被用來證明剛剛講的那個 WDVV equation, 亦即所謂的 associativity of the quantum ring。它的講法非常簡單。你現在如果有兩個位置, 就是我剛剛一開始的限制條件: 我要求這個曲線要通過這兩個點。記得我剛剛在跟大家講這個古典參數化曲線的時候, 都是用一個實函數, 用一條線把它參數化過去。可是在數學裡面, 你當然可以用複數; 你可以用實數, 就也可以用複數。我寫的那個 t 可以讓它是實數, 也可以讓它是複數。可是你讓它是複數的時候, 就掃出一個面, 因爲你現在有兩個維度。你把右圖應用到複數的時候呢, 就像你剛剛限制的兩個點的條件, 然後你去乘上另外一個東西, 就是去乘上和它在這個點的 combination; T_i 乘以 T_j 乘以 T_k, 你要連乘三個東西, 最後得到的是剩下來的線性組合, 你原來的元素的線性組合。所以你第一種方法就是用左下點去乘以右下點, 再乘以左上點, 然後看它會得到什麼樣的結果。WDVV equation 說的是, 你也可以把它從另一邊切開來, 也可以把它想成是左下點乘以左上點, 再乘以右上, 看右上的結果。在弦理論的 formulation 裡面, 你一旦把這個 correlation 方程的計算 formulate 得很清楚之後, 你就會發現剛剛解釋的就是結合率。它看起來非常簡單, almost trivial。就是對於一個這樣的圖形, 你是從這邊把它 cut 掉, 或是從那邊 cut 掉。那時候當然那些數學家絕對不會接受的, 就是物理上第一次講這個的時候, 沒有數學家相信, 任何人都覺得你在亂講, 直到過了六七年後數學上嚴格證明了這個東西。

量子化 (Quantization)

接下來我們要講, 爲什麼這樣就可以量子化? 到底發生什麼事情? 我們都知道, 有一種東西叫 Feynman 的 path integral。你不知道也沒關係, 我告訴你它是什麼。它就是說, 我現在要從一個地方到另外一個地方, 我不知道它的軌跡是什麼, 我想要決定它的軌跡, 可是它似乎又沒有任何軌跡, 因爲我們知道在量子力學的世界裡面, 它所有東西的存在都不是一個真實的軌跡, 它是一個機率分布, 對不對? 我們知道量子力學告訴我們這件事情。它不是像牛頓力學這樣真的有一個很固定的軌跡。這樣我怎麼去計算東西呢? 這個理論告訴我們說, 你必須要做一個積分, 這個積分必須要對所有可能的路徑去積分。可是所有可能的路徑這句話, 在數學上是沒有定義, 因爲它是一個無窮維的概念。即使任何兩個點之間, 你考慮所有的曲線, 如果這曲線是任意的, 它就是一個函數空間, 它是無窮維的。所以在物理上, 雖然這個 Feynman 的 path integral 我想在 50 年前就已經發展了, 而且可以推測很多計算, 可是從數學的觀點, 那些計算都是不嚴格, 沒有定義。但不管, 這對物理學家不是問題, 因爲他知道物理現象可以導引他做什麼。

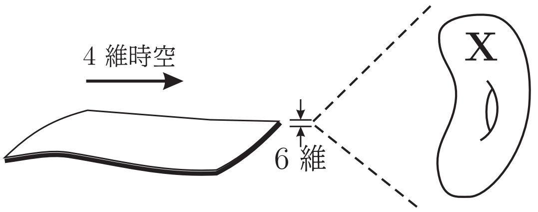
量子化的第一個革命是, 1970 年代 Polyakov 利用 Feynman path integral 找到了正確的所謂的 action functional, 也就知道這個場論在弦理論之下到底我要 minimize 的 action 是什麼, 我要怎麼做這些事情? 這些東西全部都找到了。在最小作用原理之下, 做出來的軌跡, 它會是所謂的 conformal mapping。因爲我們現在是弦在跑, 它是一個曲面, 所以這個曲面打到我們的空間, 我們這時候就不是一條測地線, 不是一條直線, 我們是一個曲面打進去的。這個曲面 turns out 就是我們在複變函數裡面學的 conformal map, 也就是所謂的 analytic map, 或者是所謂的 holomorphic map。不管怎麼樣, 它講的就是在複變的意義之下的 conformal mapping。這種東西就是我剛剛一開始告訴大家的, 什麼叫做參數化, 什麼叫做給一個 rational 的 parametrization。如果我一開始這個曲面就是一個球, 就是一個黎曼面; 我從一條線, 加上一個點, 變成射影直線, 考慮的數不是實數, 是複數, 這時候這個東西叫黎曼面。黎曼面打入這個空間, 如果它是一個 conformal mapping, 而且會通過你要的這些點, 這些全體就是我們剛剛所定義的那個所謂的 correlation function。

可是這個東西有一些問題。第一個問題是, 它沒有所謂的 Fermion variable。Fermion variable 是在物理的實驗中, 你需要解釋 Pauli 的互斥原理, 還有半自旋的現象, 它需要引入這種交換會差負號的變數。然後不只是這樣, 它算出來會有一些錯誤。如果時空的維度真的是四維, 它是無法 consistent 的。在這個理論之下, 最後推出了時空必須要是 26 維。當然很多人都聽過這個東西, 可是其實很多人從來沒相信。絕大多數的人講這種東西, 都覺得是在講科幻小說。我只想告訴大家, 這是我的拓樸量子場論的課中, 最後的期末報告其中一個博士生講的題目; 我就是要他真的講這種東西, 在物理上我們怎麼了解這種事情? 可是怎麼會有 26 維? 我們明明的時空就是四維, 我們可以感受到的只有四維。可是這個理論要能夠對, 它需要 26 個變

數。然後這時候, 所以當時就沒有人理它了。

然後一直到1980 年, Witten 進來之後, 產生了所謂的第二次革命, 這第二次革命就是超對稱。超對稱是在講什麼? 就是你既然允許你有正常的 variable, 也有這種不正常的 variable。正常的 variable 在物理上叫做 boson 玻色子。不正常的 variable 叫做 fermion, 叫費米子。那在數學上它就是對應到你交換是可以普通交換, 或是交換差一個負號。那當然在數學上, 我們大家都知道這種模型很多, 譬如 differential form, Clifford algebra。你數學學夠多, 你就知道這種東西不是很難找。所以數學作爲這個東西的模型, 沒有太大的困難。真正的困難是, 這個 26 維, 我們不知道怎麼辦。超對稱的想法就是說, 在普通的空間中, x 和 y 座標角色是差不多的, 可以交換, 對不對? 可是在這個物理世界, 你有 boson, 你有 fermion。這兩種 variable, 到底可不可以互換角色? 它可不可以有一種時空, 這樣子把它交換? 一開始大家覺得非常瘋狂, 可是 turns out 有很多物理的理論推測這是可能的。後來大家就開始相信, 在弦理論裡面, 可能會有超對稱。Schwarz-Witten 寫了很大一套的 string theory 的書, 在講這些東西。最後就出現了超弦理論。如果你相信時空有超對稱, 突然間這 26 維, 就會直接降到 10 維。你會說 10 維還是太大了。我會說 10 維已經夠小了, 至少不是 26。10 維減掉我們所熟知的 4 維時空, 剩下 6 維。這 6 維, 數學就有辦法來玩這個東西了。因爲這個 6 維的東西, 根據我剛剛所講的一些東西, 超對稱會保證它有複結構, 它會是複數的一個 3 維流形。

我一開始跟大家講說, 我要考慮平面, 然後考慮二次曲面, 考慮三次曲面, 考慮這些奇怪的曲面, 然後我的參數化打入這些奇怪的曲面, 對不對? 我爲什麼要做這件事情? 爲什麼不斷地在改變我的 target。就是我要打進去的東西, 讓它變來變去? 因爲那個東西就是我們現在要講的這個額外的空間到底是什麼, 也就是這個 extra dimensions。我們開始去想像一件事情就是說: 我們活在這個世界上, 我們在每一個位置, 到底要描述這個位置的所有的變數應該是什麼? 當然我們會覺得就是時空 x, y, z, t, 可是其實遠遠不止這樣子。因爲我們知道當你要去描述電子, 或是描述一些電磁力, 我們知道它裡面本來就有一些相空間, 只是那些相空間比較像是 $+1$、-1, 或是像是一個 S^1, 是一些比較簡單的東西。但在弦理論裡面, 它似乎告訴我們, 這個 10 維的時空看起來應該很接近於我們所謂的 Minkowski spacetime $\mathbb{R}^{3,1}$ (也就是三維的空間加一維的時間, 在愛因斯坦的這個狹義相對論裡。) 然後會有一個很小的內在空間, 黏在你每一個時空的點的上面, 而這個內在空間, 它必須要滿足 $R_{ij} = 0$, 因爲真空愛因斯坦方程必須要對。我剛剛講過愛因斯坦方程對任何維度都對, 所以這時候它的 Ricci curvature 必須要是 0。這個條件是一個非常複雜的偏微分方程, 但是它 turns out 被我的老師, 就是丘成桐老師所解了。丘成桐老師著名的工作, 得了 Fields Medal 的工作, 就是這個工作, 就是著名的卡拉比猜想。



卡拉比猜想是說: 要解這個方程, 只有一個條件, 就是必須要去計算我的老師的老師所發明的陳示性類 Chern class。我們知道華人數學家第一個最偉大的、在世界上能夠排到歷史上的, 當然就是陳省身老師。陳省身發明了所謂示性類。示性類是對於一個空間的一個很特殊的拓樸量。丘老師證明說: 能夠解這個 Ricci curvature $= 0$ 的充分必要條件, 就是第一個示性類, 陳示性類, 要是 0。陳示性類事實上是很容易算的; 譬如舉例來講, 如果你今天拿一個 4 維的空間裡面的一個超曲面。拿一個方程式 $\sum x_i^5 = 0$, 這個方程式解下來以後, 它複數的維度降一維, 變成 3 維。所以複數是 3 維, 實數是 6 維。這個例子就是最簡單的一個, 我們剛剛講的內在空間, 就是 Calabi-Yau manifold。就這個東西的軌跡, 真的能夠解出一個 Ricci curvature $= 0$ 的, 愛因斯坦方程的解。當然有更多更多的例子, 因爲你只要會算這個 first Chern class, 你就可以造很多很多例子。

哪一個內在空間描述宇宙? 空間手術 — 幾何躍遷

一開始當物理學家走到這個位置的時候, 非常非常地 exciting。Witten 和一些當時的物理學家跑去 Harvard 找丘老師, 問他說你們數學上有沒有這種空間? 其實當時造出來的例子還很少。我這邊有列下一個表, 你大概的狀況是這樣: 在 1990 年的時候, 我們大概知道有 1000 種這樣的空間。我這邊只寫了兩個,

$$X \subset \mathbb{P}^4, \quad \sum x_i^5 = 0,$$

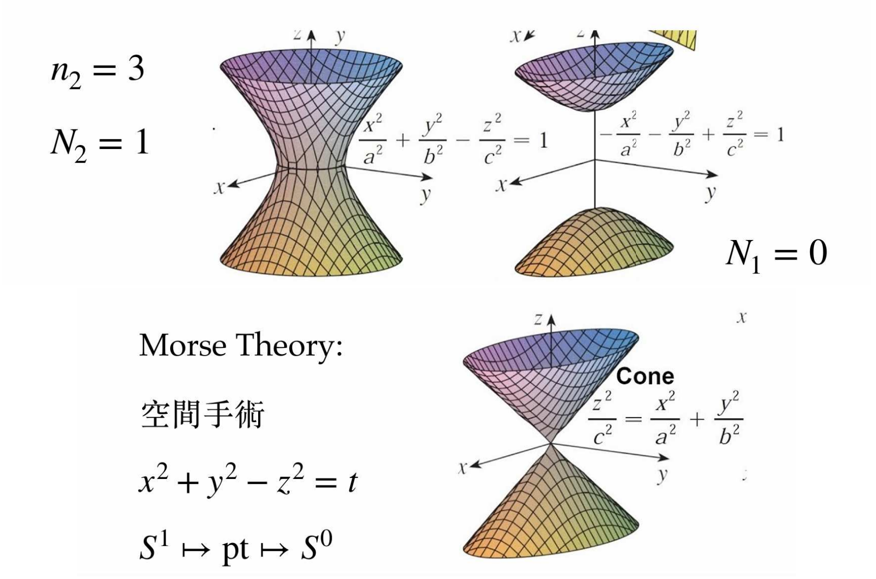
$$X \subset \mathbb{P}^6, \quad f = g = 0, \quad c_1(X) = \big(6 + 1 - (\deg f + \deg g)\big)H = 0.$$

但你用同樣的方法可以很容易找出很多, 到2010 我畢業後兩年, 它的個數大約 100000000 已經我都不知道有幾個 0 了。我前一陣子稍微查了一下, 有天文數字這麼大的個數。可以造出很多種這樣的內在空間, 物理上就開始覺得這樣不行, 開玩笑, 我們的宇宙不是只有一個嗎? 我們怎麼可能可以允許你有這麼多不同的內在空間? 所以弦理論一定是錯的, 對不對? 要不然你告訴我啊, 那個多出來的 6 維應該是什麼? 當時我在念書的時候, 這是當時一個很大的問題。當然這是一個公開的場合, 不過我還是告訴你, 我的志向就是我想要解決這個問題。

當我知道這個問題的時候, 我覺得有一點像是, 用一個比較 sloppy 的講法就是說, 這世界上有很多種宗教, 每個人相信不同的神, 可是大家都相信他信的那個神最厲害, 祂是萬物之靈, 祂可以解決一切的問題。可是如果每個人都是對的, 只有一種可能, 就是每個宗教都是等價的, 每個神的力量都是一樣大的, 祂們都在某種意義之下是等價的, 但是你必須要找到這個意義是什麼。換句話說就是當你研究弦理論, 當你的內在空間被換掉, 擁有不同的內在空間, 而你還相信這個東西正確地解釋了這個宇宙, 你只有一種可能, 就是這些不同的內在空間導致的這些物理的效果是等價的, 否則你還能夠怎麼解釋? 否則就是這是錯的, 對不對? 所以我們開始要面對, 可是問題似乎非常難以解釋: 這到底在幹什麼?

這就有一個非常重要的看法。回到我們剛剛講的黑洞。如果你通過一個時空的奇異點, 但是這個時空的設定假定是 $\mathbb{R}^{3,1} \times X_0$, 一個 Minkowski spacetime 乘上一個實 6 維的 (複 3 維) 的很小的空間。愛因斯坦方程的奇異點, 不一定要發生在時空。如果它發生在時空, 就是會是我們想像的普通的黑洞。可是它也可以發生在 X_0 上面。它如果發生在你的內在空間, 那個你看不到、你想像的內在空間, 好像沒有違反任何事情。我們現在問的就是, 如果是這樣發生的話, 相當於我們經過這個奇異點, 只是把空間換成另外一個內在空間。這時候我們把這樣的一個動作叫做「空間手術」, 或者叫做「空間相變」, 或者叫做「幾何躍遷」。

我給大家看一些圖。這是我們大家都會的, 從國中、高中, 高中的課本一定有。我相信這個范老師當時編的教科書, 或者是我們這邊很多人當時學的東華本, 或是實驗本, 我們都有這些圖。然後我們在大一的微積分, 一天到晚都在教大家算這種東西。剛剛一直不斷強調, 我們學習任何東西, 最重要的是好奇心, 否則你看到再厲害的東西, 看到再有趣的東西, 也沒有感覺。譬如說以我現在看到的這個東西, 大家都知道它在幹什麼。它實際上在做的事情就是, $x^2+y^2-z^2=t$。



t 如果等於1, 它就是左上這個。t 如果等於 0, 就是一個圓錐, 就是右下這個。如果 t 等於 -1, 正負剛好倒過來, 這時候它的兩葉, 上下葉被分開了。這就是一個所謂的空間的手術; 在這個例子裡面, 你可以從這個地方去想: 我如果把圓錐連接一條管子, 把它連上去以後, 就可以重回光滑處, 只是說那個 process 在數學上, 必須要經過一個奇異點。我現在解釋的這個動作, 當然我現在寫的是一個很低的維度, 二維, 雖然你現在要做的是一個六維的, 可是這樣的一個 picture 是類似的。它真正發生的事情在這裡, 你是把一個圓經過這個轉換以後, 變到兩個點, 換句話說從 S^1 變到 S^0, 因爲 S^0 就是 $+1$、-1 兩個點。可是如果你在高維度, 它就會把譬如說六維的話, 把三維的球變成二維的球, 它會經過這個 process。這個東西在數學上叫做一個 surgery, 或者如果你有學過一些比較深刻的近代的拓樸, 這叫做 Morse 理論。

當然我們真的要做數學的計算或物理的計算, 這樣是遠遠不夠, 因爲我們還要放 metric, 不管是代數幾何或是微分幾何, 都有更多的結構在上面。但你單單看一件事情, 就知道我剛在講的, 所謂的好奇心指的是什麼。記得, 當 $t = 1$ 時, 在這上面有多少條線? 有無窮多條線。有左邊這樣的軸, 有右邊那樣的軸, 然後你給我一個點。我定下一個點以後, 有兩條線; 我的量子修正項, 就是加上的那些 correlation function, 在 N_1 就已經有了。可是呢, 你如果真的把它 surgery, 空間做這個相變之後變成 $t = -1$, 圖形上面顯然沒有任何直線, 所以它的 N_1 是 0。所以這告訴我們什麼事情? 這告訴我們說, 所謂的這個內在空間, 當你把這個量子修正項丟進去之後, 根本就完全不一樣, 因爲在一邊有 N_1, 可是在那邊沒有 N_1。你說: 這樣不就違反想像了嗎? 可是不是這樣, 因爲這只是其中一項。你現在做出來的是整個函數, 是整個生成函數 generating function, 對不對? 所以你要研究的是這個函數的解析延拓的行爲。

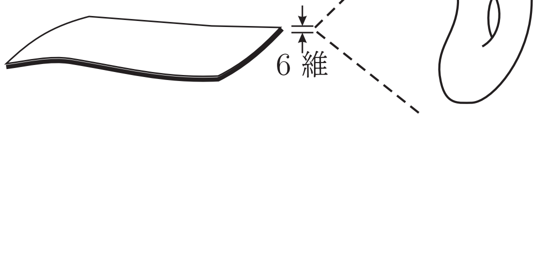
最終我就解釋一下我們做的一些事情。弦理論到今天是沒有辦法實驗的, 因爲它的尺度小於現在能夠做的實驗的任何尺度, 那這也是爲什麼開始是數學家進來 play 這個 role。我剛剛所描述的這個躍遷, 就是所謂的這個空間手術, 它在數學上可以理解成 S^3 乘 S^2 可以是兩個不一樣的東西的 boundary:

$$\partial(S^3 \times D^3) = S^3 \times S^2 = \partial(D^4 \times S^2).$$

你可以想像, 一個三維球在一個六維裡面, 我把它一個 neighborhood 拿掉, 重新塞入一個二維球的 neighborhood。這樣的東西在數學上, 當然在拓樸上研究了很多。這邊很多是從中央大學過來的同仁。我從以前在將近 20 年前, 在中央大學, 與林惠雯及李元斌開始有個團隊, (林惠雯是畢業在這邊的博士)。我們在量子環的研究中, 證明了在一種叫做 ordinary flop 的空間手術之下, 雖然普通的乘法, 古典的乘法是不保持的, 但是一旦你把量子修正項全部加進去之後, 這個量子乘法在解析延拓下保持。這是我們當時做的第一個工作。

可是對於我剛所描述的這種所謂的躍遷, 就是 surgery, 那就更困難。我和李元斌、林惠雯只能做很基本的很簡單的 case。但是最近我與我的博士生李雙言, 他現在是博四, 我之前的博士生王賜聖, 他現在在陽明交大任教, 我們最近完成了一個在一般形式的幾何躍遷之下, 這個交互作用的函數, 你對它取某一個很特殊的極限, 這個我就不解釋是什麼。在這個很特殊的極限之下, 就會得到另外一個空間的交互作用的函數。也就是在一個有比較多的場的內在空間。你取一個很特殊的極限, 會得到另外一個空間的交互作用函數。這些努力就是試圖去解釋, 如果我們接受了弦理論這樣子的量子化, 數學上該處理怎樣的問題。

現在進入演講最後一段, 我到底什麼地方把它量子化? 爲什麼要弦理論才能量子化? 我原來一開始講的這種曲線, 是一條實數的曲線。我設計我的空間的時候, 我繞出來是一個普通的圓, 可是那個東西明明沒有拓樸, 因爲它在一個平面中,



任何一個圓都可以縮到一點, 所以以拓樸的意義上來講, 它沒有真正拓樸上的 non-trivial class。可是現在當變成是弦論, 它變成是一個 surface, 這個 surface 在纏繞的時候, 你的弦在這邊跑, 你有個 surface, 然後你打進你這個六維的時空, 可是這六維的時空裡面有很多 non-trivial 的拓樸。這時候, 譬如說如果這是裡面的一個曲面, 我就可以把我的曲面壓住這個曲面。所以這時候我可以看我在你這邊纏繞多少次。那這個東西就推廣了我們在複變函數裡面學的 winding number。Winding number 只是線對線的纏繞, 而我們現在談的是一個曲面對另外一個曲面的覆蓋次數。所以這樣子它就是一個量子化。因爲回想我們一開始對量子的理解: 它是一個能階跳到另外一個能階, 它是一個離散的跳躍。而我們現在的跳躍是什麼呢? 我們現在的跳躍是, 在每一個內在空間裡面, 你去看它的 $H_2(X,\mathbb{Z})$, 第二個 homology class。我們把我們的曲面, 我們的運動軌跡, 把它蓋住這個曲面, 然後我們在算這樣東西的交互中的強度有多少。這是一個我們能夠從弦理論得到的數學的一些題材。

當然數學裡面, 從物理得到很多的 inspiration, 因爲我剛剛講了, 在沒有量子環之前, 這些東西都是不可能計算的。可是 on the other hand, 物理也從數學裡面得到很多東西, 因爲這些東西在物理是沒辦法實驗的, 所以什麼事都不能做了。但是數學還是能夠提供一個邏輯上的驗證, 就是說如果這些東西都對, 數學上應該會有什麼結果。如果數學上得到的結果不是這樣, 在物理上也許需要做一些新的想法。所以我很高興能用這個作爲結尾:

數學之美在於眞善, 不爲什麼, 好奇而已。

看到再有趣的東西, 如果你不感到好奇, 它都沒有什麼。那謝謝今天的邀請。

問與答

聽眾: 我想問的是, 剛剛一開始介紹的, 譬如說 N_d 的數字, 那時候一般是寫下一個你說的代數式, 感覺上寫下來的時候, 並沒有想到說這個是放在什麼樣的時間。但是如果說我們討論, 比如說幾何常常會考慮說你有一個條件, 但是這個條件限制, 其實是放在比如說是 Euclidean 或是 Minkowski space 裡面, 得到的就不太一樣。我不知道在計算這個 N_d 的時候, background 的 metric 會不會對那些數字有影響?

答: 好, 謝謝。這是一個比較技術性的問題。事實上這個答案是這樣, 就是說, 我們現在所寫下來的這種 N_d 的這種交互作用函數, 叫做拓樸量子場論, topological quantum field theory。換句話說, 它不是真正的 quantum field theory。也就是說在真正的量子場論裡面, 它還有一個 dynamical 的部分, 可是那個部分目前爲止還沒有嚴格的數學方法能去做它, 也就是說它本來是活在 Feynman 的 path integral 這個世界; 你爲了要讓這個東西在數學上能夠嚴格定義跟計算, 你需要透過超對稱, 它有透過一些 localization, 使得它變成一個有限維的空間可以計算, 就會回到我剛剛講的這些 conformal mapping 這些東西, 最後才得到 N_d 的定義。所以

N_d 這個東西本身, 已經不是最完整的量子場論, 它相當於是量子場論的某種拓樸的投影。它其實可能會有很多種投影, 所以 N_d 自己本身的定義, 就已經不是唯一的。相對於量子場論, 它事實上是依賴於你的拓樸, 在術語上叫做 twisting, topological twist。所以首先你有不同的 topological twist。

再來是它的 background X, 就是您剛剛提的這個, 事實上這個 X 的選擇是不唯一的, 就是我剛剛最後提到, 你可以選擇像我剛剛解釋的所謂的 flop。Flop 這個動作就是, 你選了兩個看起來非常非常像的 background, 你的 N_d 算出來, 其實也不一樣。一開始表面上看起來不一樣, 可是當你把這函數全部加起來的時候, 事實上是一樣。也就是說, 要怎麼解釋這件事情? 它相當於只是某種參數的座標變換。所以對我們來講就是說, 這個 X 的選擇是可以不一樣的這個動作, 是因爲你現在採用的是這種幾何的 background。在物理上, 這叫做 sigma model, 就是把你的弦打進一個幾何空間。

而且這不是唯一的做法, 因爲事實上有一大票的人用的是表示論, 用的是 representation theory。這是什麼意思呢? 就是說你拿到一個幾何空間, 你看到它是它的拓樸, 是它的 homology、cohomology, 這些東西來代表你的量子數。可是要達到同樣的效果, 不一定要這樣做。譬如說我們去看量子力學, 它不是這樣做。它就是告訴你, 我有一個 Hilbert space, 然後有 operator, 我作用在上面, 我直接從那邊去看到我要的這些計算。如果你這樣想的時候, 你根本從頭到尾都不需要那個內在空間, 你只需要那個 Hilbert space, 對不對? 可是當然這會有一個缺憾就是說, 這好像是一個猜出來的答案。一般的人在學量子力學, 可能最不高興的事情就是說: 你就告訴我是這樣, 我就這樣。我不知道大家了不了解我的意思。譬如說我們今天在背這個氫原子能階, 或在背各種元素表什麼東西, 在大部分的時候, 很多裡面的環節你完全不知道爲什麼, 你只知道說它有這個規則, 這個規則是對的。這就有點像就是說, 反正你要算任何東西, 我就 create 一個 Hilbert space 給你, 我就 create 一個 operator 給你, 然後你就這樣算。那麼這個幾何空間的價值是什麼? 它給了你一個把這個抽象的 representation, 換成是一個從幾何上可以表達的東西。這當然會讓我們在感覺上比較有東西可以想像。但是當然它也有它的缺點, 它的缺點就是你必須要去解決我剛剛講的, 當你把這個空間換掉的時候, 你必須要證明它們是 consistent。如果你採取的是前者, 從頭到尾就沒有這個問題。可是這就是涉及到說, 你要把一個理論數學化, 你究竟想要數學化到什麼程度? 我沒有特定的答案。

對你剛剛的問題, 我只能說, 幾何化只是其中一種量子化的方法, 不是唯一的方法, 但是透過這方法, 能夠讓我們把代數幾何與微分幾何做一個非常好的連結。如果你今天用的是表示論的方法, 會來這邊演講的人就不是我, 就會是做所謂的 Kac-Moody algebra, 就做這些 infinite dimensional representation, 譬如說中研院程舜仁, 或者說是其他的專家。他會告訴你的是另外一套量子化的方法。我今天講的是幾何化的量子化方法。用這樣的方式, 它可以在某一種意義上, 把代數幾何與微分幾何連結。希望這有做一定的回答。

聽眾: 先恭喜你幾個月前當選院士。我看新聞記者訪問你, 你大概講了兩個重點, 第一個就是說你當院士, 你要感謝你的團隊, 這個當然是謙虛就可以解釋了。你回答記者第二個問題, 我很好奇, 就是我接下來問的。其實你演講都有講過, 你的這個理論目前物理學界都不太認爲會是這個樣子。我們都知道說愛因斯坦的那些理論, 現在因爲有很強大的望遠鏡, 所以有很多都被證實是對的, 就是他的孫子輩的就可以看得到他爺爺的成果是正確。你講的這一些, 如果將來在物理學界, 或者在天文學界, 要有辦法驗證。因爲你說可能是尺度的關係, 目前是都沒有辦法去驗證的。將來如何去驗證或者論斷說是不是這樣子的? 應該不可能靠望遠鏡。那是要靠什麼東西呢? 謝謝。

答: 這個問題當然是比較大的問題, 我要怎麼來談這些? 我舉一個最好的例子, 就是2015還是2016的諾貝爾物理獎的得主, 他得的工作叫做 Topological Phase of Matter, 就是質量物質的拓樸相。其實我們要知道, 在物理上, 對這個外在維度, 就是所謂這個內在空間的一種想像, 其實是很早以來就有, 至少我想 1940 年可能就有。但是主要是說, 每次提出這樣的東西以後, 就被另外一種力量否決掉, 因爲找到很多無法解釋的東西。弦理論這個東西, 爲什麼會被大家反對, 是因爲在弦理論的世界裡面, 雖然沒有任何東西是矛盾; 它是目前爲止唯一找不到矛盾的。可是問題是你把你的空間加到這麼大, 變數加到這麼多, 當然不會矛盾。物理學家就講說, 你加了一大堆東西, 大家都沒辦法測量, 當然不會矛盾。它矛盾, 你再多加一個, 就不會矛盾, 對不對? 所以真正研究物理的人, 做科學當然最重要就是實驗觀察, 從真實能夠看到的東西中, 推測我們接下來要怎麼樣, 這才是科學。這是物理學或科學的基本精神。這就讓弦理論陷入一個非常尷尬的狀態, 所以才會有我們現在數學家扮演比較大的角色, 對不對?

至於你說它未來會是怎麼樣, 我只能告訴你說, 譬如說這個諾貝爾獎的 topological phase, 就是物質的 topological phase, 如果你要真的從數學的觀點來講, 其實非常地簡單。它比我剛剛講的東西都要簡單很多。它的 extra dimension 的維度非常小, 可能只有第五維、第六維。我都已經講到十維去。可是不是這樣, 這不是科學家看這個東西的方式。科學家看這個東西的方法是, 你講的東西必須要能夠驗證, 必須要能夠透過驗證, 然後我接下來能夠去做新的東西, 預測新的東西。所以作爲物理學, 當然是因爲新的實驗發生了, 能夠測量那樣的東西。雖然它講的訊息是一小部分的訊息, 不是很完整的物理, 但是至少那些東西是能夠被 checked。所以這樣的東西值得可以得到一個諾貝爾獎。

對數學來說, 你不是做物理, 是從內心的世界, 是從邏輯的世界去看待這個世界。我們就要去回想, 譬如說 Riemann 在 1855 年發明了黎曼幾何。你說他爲什麼要發明黎曼幾何? 高斯已經把我們這個地球上所有的解已經做完了。他已經把三度空間中的曲面已經全部做完了。問題是高斯給黎曼的兩個題目, 成爲教授的題目, 第一個題目就是我們現在所知道的 Riemann hypothesis, 著名的黎曼猜想, 第二個題目就是所謂幾何空間的基本原理。黎曼最後選擇了幾何空間的基本原理來作爲他的教授任職的演說題目。大家如果回去看黎曼到底寫了什麼, 其實

黎曼裡面沒有寫什麼, 他大部分都一直在講故事, 就是一直在講一些想像, 他在裡面其實數學很少。黎曼當然很早就過世了, 他寫的文章也沒有非常多, 可是這是唯一的一篇文章裡面最少數學的, 好像都在講; 你看到就是一堆德文, 它數學非常非常的少。可是他當然已經知道就是說, 作爲一個幾何學的原理, 你要去描述這個宇宙, 不管這個宇宙是長什麼樣子, 不管它的維度是多少。其實對他來講, 他沒有預設任何事情, 所以他 purely from curiosity, purely from logic, purely from 你必須要 consistent, 然後來理解說, 這樣子的邏輯認知應該要做什麼事情。可是這就是數學。我們必須要理解就是說, 數學跟外界的關係固然是非常非常地綿密, 可是數學不是別的東西, 數學是數學, 因爲數學堅持用它的純粹邏輯系統發展, 所以它不會錯。我說它不會錯是因爲除非邏輯是錯的。

所以當我們在看待數學的價值的時候, 我們是沒有辦法 evaluate 它 from 它的 application。我們不知道。比如說黎曼在微分幾何的貢獻, 當然不是在寫下黎曼幾何的那一天。他也不知道它會有什麼貢獻。如果沒有愛因斯坦的話, 說不定沒有人想學黎曼幾何, 說不定學的人就只有數學家、幾何學家。可是當愛因斯坦相對論出來之後, 不得了, 所有的物理學家都要學黎曼幾何, 至少要做重力的。對於做一個數學的人來講, 我覺得我們之所以不是選擇做工程, 不是選擇做電機, 不是選擇做物理, 是因爲我們可能更在乎來自於內心世界的一種邏輯世界; 就我們喜歡這樣東西, 或是我們的天性, 促使我們做這樣的事情。當然這不是人類所有學問中的唯一。我想在人類世界中, 我們至少會有三個完全不一樣的東西, 一個是 pure logic 數學, 對不對? 一個是 physics, 是 natural science, 它是一種經驗科學。還有一種東西也是我們不知道, 比如說心理學, 對不對? 是這種認知。我的意思就是說, 當然這些東西都非常有相關, 而且每個東西都深深地影響另外一個東西的發展, 可是我們知道, 我們都不能夠完全 cover 另外一種研究, 而數學只能扮演好數學的本分。當然在這過程中, 如果你希望這個東西, 或是你發現這個東西跟別的東西很有關係, 當然你會很 happy, 因爲它對別的東西有影響, 你當然會更高興。可是你要讓這個東西實現, 你當然要花很大的力氣去學那個 domain knowledge。所以我想我花了很多時間在學。至少我還很勇敢地在公開場合, 敢講這些物理的東西, 就顯然我的物理絕對不是說看得太少, 對不對?

這是每個人對你自己要的一種要求, 好比說我剛剛講的那個 ruled surface, 它看起來非常簡單, 可是你要去看我們現在的所有的這些建築物、工程, 這些最棒的藝術設計, 你可以看得到在全世界各地最好的橋, 最好的建築, 其實它們也不過就是 ruled surface, 因爲它們就是拿一根柱子去掃, 然後掃出各種很漂亮的圖形。那些東西在工程上已經是極爲困難了, 因爲當你用這樣子的東西, 你在量各種力量要怎麼去計算。我的意思是說, 如果你從數學的觀點, 可能是一個非常簡單的 object, 可是當你把它拿到實體世界去的時候, 在那個應用中它所需要的知識更多, 已經遠遠超過數學了。也許有一部分是數學可以幫忙的, 在計算的部分或什麼, 可是它有另外的東西, 比如說物理上那些實驗的東西, 我們是不會的, 我們也沒有那些器材, 對不對? 事實

上就算我們有那些器材, 我們也不想去做這件事。我記得很多人來念數學系, 他就是說我就是因爲發現數學系不用讀化學, 所以我才來念數學系。很多人就是說: 我最討厭做實驗, 然後做到實驗, 他就很痛苦。每個人都有他一種特性。

你問說我做這些東西, 對未來會不會有什麼影響? 我從來不這樣想, 這不是我想這件事情的方法。我想這件事情的方法是: 就這種數學的認知跟邏輯, 你可以達到的最高、最遠的境界是什麼? 當然在這裡面, 如果跟其他的科學產生關係, 我們應該要很虛心、很高興地去得到那一方面的 domain knowledge, 因爲它可以幫助你去達到一些你在原來的數學想像中, 不容易想到的東西, 比如超對稱或是某些東西。可是 on the other hand 可以透過這樣的交流, 你這些數學的東西也會對物理產生一定的影響。那樣的影響, 你也不能期望是非常全面的, 但是它可能是 sparsely 慢慢給一些影響。譬如說在台大物理系的幾個老師, 像賀培銘他們做弦論, 或是說高涌泉做場論。他們常常來找我討論很多數學, 但很多時候是我在告訴他們一些數學是怎麼樣, 他們可能不是那麼清楚。

但當然無論如何, 我想在數學的角度, 我們當然有時候我們會覺得數學很偉大、很萬能, 對不對? 當然從我們的角度, 可能想要這樣講, 可是 outside 這個 pure math 的世界, 你要到 application, 比如說應用數學或是數學物理, 那對方的現場的 domain knowledge 當然是至關重要。我們未必有這樣的興趣, 我們也未必有這樣的 background。如果你真的有興趣要達到那樣子的 application, 你也要投入。你不能只是說我拿著我的數學的公式, 我希望別人來幫我用, 然後我得到一定的 credit, 這個是不 make sense。你必須要自己成爲一個工程師, 你必須要自己成爲一個那樣的人。我們做數學的人, 就是把我們的東西做出來, 它是對的, publish 它, 很高興把它寫成定理, 然後以後人家可以引用, 然後 that's the only thing you enjoy, 對不對? 這樣有回答嗎?

聽眾: 請問一下王院士, 暗物質大家還是了解不多。這不曉得是和 extra 的 dimension 有關?

答: 這個問題又比剛剛那個再更大。我讀過一些類似的文獻, 當然我有些朋友是在做這個, 我只能跟你說, 這不是我能夠回答的。當然在弦理論裡面, 確實很多人拿它來討論暗物質, 但是我剛剛說, 其實在物理的世界裡面, 這已經有很大的爭議, 所以我應該是說我不知道, 當然我相信是。如果你問我的話, 我相信我現在所做的這些工作, 譬如說我對於黑洞的詮釋, 是在 inner space 的 singularity。這些東西當然我內心裡面是深信不疑, 但我並沒有覺得別人要 recognize 這樣的事情, 因爲我覺得在目前這個時空點, 在目前這個狀況下, 我們沒有辦法回答這樣的東西, 因爲那不是任何觀測可以到達的東西, 我們只能夠回答我們能回答的事情。Sorry, 這個應該來去問我物理的朋友, 看有沒有人願意幫我回答。

答: 秘書有給我兩個問題, 是有人先提到的。其中一個問題類似說, 要學代數幾何非常地麻煩, 非常地複雜, 如果真的要學它, 應該要如何進入? 他自己原來的 background 可能是比較分

析的。當然我常常遇到這一類的問題。事實上在各個場合, 尤其是在台大, 常常有很多物理系的人會來找我, 然後譬如說他想要做我的博士後, 或是很想要來跟我請教一些東西, 當然我第一個發現就是他的數學的基礎真的是不夠。我要跟他講這件事情。我可能需要他先來修我一年的課。然後可能還不夠, 可能還要再參加我的 seminar, 再參加一年。他們問的問題其實都很大, 他們想要了解的事情都很難。

當我們在面對這些東西的時候, 我覺得分兩個階段, 第一個就是你還不是一個研究生, 你還是一個大學生, 還有一個是你已經是一個研究生。如果你已經是一個研究生, 當你對任何一個東西感到有興趣, 你最應該做的事情是直接找一個題目來做, 不要再去學什麼了, 已經 too late。你覺得這個東西有興趣, 你覺得你有可能可以做, 你就去找一些你可能可以合作的朋友, 然後邊做邊學。在這過程中, 測驗一下你是不是真的能夠前進。因爲當你對一個東西真實感興趣的時候, 你學這個東西, 它的難度會降低。因爲雖然它很難, 可是你知道如果你把這個東西弄懂, 你就可以走到下一步。所以它會激勵你去學一個東西的慾望, 而且它會讓你自己去選擇一些捷徑。也不是說捷徑, 就是一些比較可能的路徑來了解這個東西。你可能要假設很多東西, 但是還是可以前進。這個前提是你要真的對那個東西有極高的興趣。

我們一般學數學或是一般學任何東西, 最大的問題就是你坐到一個課堂上, 反正它就是一個課, 它就發了一本書, 然後就是要學這些東西, 然後你坐在那邊, 其實你也不知道學這幹什麼, 然後你一直就昏昏欲睡, 然後就開始睡, 對不對? 反正在大部分的情況下, actually 都是 waste of time。就算你真的很認真, 就算你是一個超級認真的學生, 做了所有的習題, 就是老師叫你做什麼, 你一定很努力地去跟, 然後去做; 說句老實話, 那也是 waste of time, 因爲畢竟你缺少一個真正的目標。這個學問的世界是非常地廣大, 沒有任何一個人能夠真的 handle 所有的學問。所以你一定要訂好你真的想要了解的東西, 而以那個爲你的目標前進。所以這個剛剛那個事前來問我這個問題, 我的建議就是, 如果你是一個研究生, 你就是應該找問題去做; 從問題中, 跟你的老師, 跟你的同伴學習, 然後看你能不能前進。如果你經過一段時間的嘗試, 完全達不到你的 expectation, 你也許再換一個方式。再換一個方式, 還是失敗, 你最好趕快換一個問題。你應該知道 you can take this as 一個興趣, 但是它不可能是你的 career 的一個發展。

On the other hand, 如果你今天是一個高中生或者是一個大學生, 如果是一個高中生, 那是最好的, 因爲你可以隨便亂做, 因爲不管你怎麼做, 你都是贏。譬如說我有一些朋友有很聰明的小孩, 來跟我說, 他小孩進了科學班, 很喜歡數學, 很喜歡電腦, 他該做什麼? 我就跟他講說, 就去做 AI 啊, 去做大數據啊。我就跟他講一些看起來很難的量子計算。他想說我小孩才國三, 現在還要升高一。我說對, 沒錯, 你就是叫他現在去做這件事情。你不要以爲這有什麼困難, 因爲這些, 我跟你講, 所有人都不會。每個人他在講這些東西的時候, 其實每個人都是很陌生的。每個人都是從一片汪洋中慢慢去搜尋。一個很天真的小孩, 和一個很有資歷的大學教授, 差別是有, 但是其實很小。因爲一個大學教授, 無非是在某個專業領域中達到很艱深, 可是對於一個完

全新興的東西, 他其實也是很陌生的。譬如說前幾天我一個姪兒, 現在是在部隊服役, 他就打電話給我, 跟我 Line, 問我這個無人機的事情, 一直問我說, 這個無人機要怎麼樣可以把它全面地干擾, 讓對面的無人機無法一直來干擾我們。他想說, 我是一個數學的台大教授, 是一個院士, 應該見多識廣, 應該什麼都知道。我當然很努力地想要回答。我回去趕快查很多資料, 看我到底能夠告訴我這個後輩什麼。我要告訴你, 我們每個人其實都在同樣的過程中成長。你固然在某個領域中, 曾經達到很高的巔峰, 這未必表示你在所有的東西都能這樣。對於一個年輕的孩子, 你就是應該讓他很放寬心胸, 去接受所有可能的教育。當然現在網路的學習, 各種方面, 有很多方式。他能夠達到的你很難想像。年輕人能夠達到的, 絕對不是我們能夠想像的這麼 limited。這樣的成功案例很多, 我今天沒有時間講。

所以我想告訴大家, 當然你如果是在大學的時候, 就要稍微 modest 一點。你還是要知道, 大學是一個練功夫的地方, 是蹲馬步的地方。比如你今天在數學系, 你就算說我今天進數學系進錯了, 我其實想要去做電機, 或是我想要去做 computer science, that's ok, 可是你這幾年就已經進了這個廟, 對不對? 你已經進了少林寺了, 你只好練少林武功, 練完以後再去那個地方做, 把這個東西帶過去。一個在大學的學生, 必須要得到的是一個專業的訓練。就算他進錯了, 他還是要得到這個最專業的訓練, 帶著這個數學的 knowledge。其實我有很多學生, 在中央也是, 他們沒有辦法繼續做數學, 可是他們數學學得很不錯, 後來到科學園區, 到很多地方, 他們也有很多貢獻, 因爲他們僅有的那些數學, 就已經比沒有的好嘛, 對不對? 還是比很多人都好。所以再去到那個地方去學 domain knowledge, 還是能做很多的研究。我以前有個在清華的學生, 後來到美國。他跟我做代數幾何, 可是他說他是要做電機的, 他後來是在 YouTube, 做了很多這種編碼壓縮、加速這種。所以數學的應用可以非常廣泛。當然不同的階段, 你要做的事情是不一樣的, 你要 realistic。越年輕, 你可以越 romantic。如果你都已經到碩士班、博士班, 你還在想那些幹什麼, 你要想的事情就是趕快把東西 make it work, 對不對?

聽眾: 謝謝金龍這麼努力, 而且可以看出你的演講稿, 花了很多心思, 嘗試讓我們理解這個問題。我現在很感謝你。可能我要慢慢讀你的 PowerPoint。我想有一個問題要問你一下, 在低維度的時候, 有 entanglement entropy。在那麼大的那個維度的話, 類似很多 entangled 或類似 quantum 那些性質, 怎麼在這麼高的幾何維度上面展現出來? 這個是基本的第一個問題。第二個問題就是說, 這個弦理論, 基本上雖然是沒辦法被證實, 但它的數學結構這麼豐富, 而且顯然是有它的道理, 我想。但一個在學習偏微分方程的人, 基本上都想看到那個方程式。對。如果有測度、有量度, 高維度上面的那些現象, 是否可以找到類似的那個不變量? 因爲常常看到幾何有很多不變量。這麼多高維度的不變量, 降到那個 quantum 的思維來看的話, 又怎麼樣連接上? 這個問題可能蠻大的, 因爲我一直想知道 entangle 的性質怎麼在高維度展現出來。

答: Okay, 謝謝。其實你問的問題還比較好回答, 原因是因爲我今天我的講法是爲了帶到我的研究, 所以我這樣講。但事實上 topological quantum field theory, 拓樸量子場論, 並不是只

有這樣子開始的。它真的開始是 1984 年 Donaldson 的非常著名的博士論文, 用 Yang-Mills equation, 就是所謂的 non-abelian gauge theory 的解的 moduli space, 重新來去研究四維流行的結構。這是他當時突破性的工作。它的維度很低, 也沒有什麼額外的這些維度。沒有。但是它的思維是一樣的。就像我剛剛講的, 我雖然有這個外在的維度, 可是我一開始出發的是平面, 是曲面。換句話說, 其實我的維度也是很低的, 所以我也可以允許你的內在空間, 事實上是一個很小的空間。對, 我一開始並沒有說你一定要有多少維。直到我們要去解釋量子重力場的時候, 要去解釋最後的那個階段, 我才需要引入這個超對稱, 這些所謂的四維空間。

回到你剛剛的問題, 你是做偏微分方程。我剛剛寫下了這個 WDVV equation, 這個 WDVV 就是所謂 associativity, 做一個環的 associative equation, 它是一個偏微分方程。事實上你只要把它用在最簡單的情況。什麼是最簡單的情況? 我剛剛舉的例子是二維的平面, 它還不是最簡單。最簡單的東西叫做 $\mathbb{P}^1$, 就是一維的。如果我現在把它參數化到直線, 直線去參數化直線, 你會覺得這個問題不是 completely trivial 嗎? 這還會有什麼數學? 沒有。那個 WDVV equation 如果能夠化約到一維, 得到的東西叫做 Painlevé equation, 這是一個常微分方程, 而我們如果學微分方程, 我們知道 Painlevé equation 是微分方程中的聖殿, 對不對? 所以我只要告訴你就是說, 這個方程式它爲什麼這麼重要? 因爲它雖然是在高維度可以有這樣的一個方程式, 但即使在極低的維度, 它其實就已經得到我們原來很關心的很多問題。所以它在某種意義上是連結了很多低維度空間的問題, 擴充更多的變數, 讓我們可以有一個更高的、更大的 flexibility 去研究它。我記得研究工作中有一部分, 當然你也知道是偏微分方程, 是與林長壽以前的一些合作, 這些裡面就有很多這樣的。郭庭榕在嗎? Okay。郭庭榕, 我跟他一起寫的這個 paper, 那篇文章就是裡面講的很多 Painlevé equation 的東西, WDVV 它的一個很特殊的情況就是 Painlevé; 當然也不是完整的 Painlevé, 一部分的 Painlevé。至於你剛剛提到的, 就是這些 entropy, 或是一些所謂 entangle 這種事情, 當你願意把你的維度擴充到這麼大的時候, 事實上有很多的東西會不見, 譬如說我舉個例子好了。我們說 knot, 我們說曲線在三度空間中會打結, 可是如果你把它放在四度空間, 它就沒有打結。所以你用另外一個維度去把這個問題化解掉。當然這也是一個你要選擇的事情, 就是說: 到底是四維比較好, 還是三維比較好? 你把一條曲線放在三度空間中, 看它打結, 看到很精彩的打結的現象。你現在如果多加一維度把它解掉了, 那到底你得到的訊息是等價的, 還是不等價的? 當然正確的解讀就是它是等價的, as far as 你知道怎麼把它連結這個關係。這有點像我剛剛講的這個相空間的轉變, 只是說從三維到四維比較像是 dimension reduction, 就是你要有一個方法去做維度的降低。維度降到太低, 當然就會造出一些擾動, 就是你剛剛講的這種 entangle 或是 knot 的這種性質。所以解決 knot 的其中一個方法就是把它放大回更高的空間, 讓你有更自由的 variable 去處理它以後, 再把它壓回去。你懂我在講什麼嗎? 就是說你看到一個現象, 很難刻畫它, 我舉個最簡單例子, 這雖然是一個很 ridiculous 的例子, 但是它真的是很類似。我們怎麼解三次方程式的根公

式? 所謂的 Cardano 公式。大家都知道 $x^3+px+q=0$。你不知道怎麼解它, 然後唯一的方法就是只要做一招: 令 $x=u+v$, 突然把它帶進去, 大家就會解。你知道我意思嗎? 這就告訴你說 introduce 一個 additional variable, 常常是一個很神奇的動作, 因爲你在這個多出來的空間裡面, 你可以亂做事情。我想這就是一個類比, 就是說我們爲什麼能夠導出三次方程式的根公式? 因爲我們 introduce extra dimension。雖然最終我們還是把它降回來, 可是我們相當於我們把我們的問題先提升到一個比較高的空間, 然後在那邊做完以後, 再把它降回去。

某種意義上這也就是 PDE 的精神。PDE 不是整天在做 generalized function, distribution? 你本來要解一個正常的解, 你不會解, 把它放到一個 completion, 到 Hilbert space, 解完再證 regularity 把它壓回來。常常很多東西是 introduce 更高的維度, 更多的變數。它不是壞事。它唯一要的事情是你要能回得來。如果你現在解偏微分方程, 你把它放到 distribution, 放到抽象的函數, 那根本不是函數。然後你那邊做完之後, 東西解出來了, 可是你沒有 regularity, 你回不來, 這個沒有用, 對不對? 在數學上就是說, 你當然可以被允許創造更高的自由度, with only thing to notice 是你要能夠 go back, 你要能夠把 extra dimension 消除。就像我們現在講的這些內在空間等等, 你想像有這個內在空間。如果最後有一天真的能夠做這些計算, 你最後還是要知道怎麼回到四維空間的 approximation, 因爲這樣子, 這東西才有可能有用。就像剛剛許志農老師講的, 我們目前並沒有很注意這樣的事情。我們現在仍然是在一個比較 logic, 比較 theoretic 的層次。這樣可以嗎?

聽眾: 王老師, 你好。就是說剛剛講到 WDVV 方程, 可不可以簡單地解釋一下它有沒有一些可積的觀點來解釋它?

答: 它就是可積的觀點, 因爲我剛剛講的這個量子環 quantum cohomology, 它到底是什麼? 它有另外一種解釋方法就是, 事實上你可以找到一個非常好的常微分方程, 這個常微分方程它的 singularity 比較複雜。它有兩個 singularity, 一個是 regular singular point, 一個是 irregular singular point。這時候你如果研究這個常微分方程的 monodromy。如果你要求 deform 這個常微分方程, 讓它 monodromy 不動, 也就是我們所謂的 isomonodromic deformation, 那麼 turns out 這個完整的 isomonodromic deformation 的這個參數就是一個 quantum cohomology。當然這是一個很近代的結果, 是 Dubrovin 在 1997 年發現的。這就是 integral system 的意義。當然這件事情是有條件, 這個條件是必須要 assume 這個量子環是所謂的 semi-simple, generic semi-simple, 還有一大堆數學的條件, 所以它也不是 universal 可用。就是說 WDVV 只是作爲 isomonodromic deformation 的一小部分, 一般而已, 它不是全部, 但在 semi-simple 的情況, 它就是全部。在大部分的人用的情況, 譬如說在我們如果有討論過或合作過的, 所有這些一般 PDE 的人可以用的所有情況都是 semi-simple。當你不是 semi-simple 的時候, 你就會進到代數幾何比較困難的世界, 你就會變成像我們真的在研究量子環的, 都不是 semi-simple, 都是有很多其他的情況要討論。可是對不是這個行業裡面的人,

當他們在用這個東西的時候, 都會是那個比較容易用的情況。當然那已經夠有趣了。但這個很技術性, 所以我想不適合在這邊繼續講下去。

答: 這裡還有一個學生問的問題是說: 我有沒有計畫寫書? 這個真的是問到心坎裡面。寫書很重要, 非常重要。我看日本有非常多日文的書。我們台灣的中文的書是很少。就算有的話, 可能科普的比較多, 做爲一個真正基礎性到專業性進階的這樣的書很少。爲什麼會很少呢? 因爲寫書很困難。寫演講稿很容易, 你給 lecture note, 證明東西, 反正就把它證對, 定義淸楚了, 和寫 paper 沒有很大的差別。可是寫書完全不一樣。寫書要考慮到你的受衆, 你的讀者, 他從什麼地方開始。寫書最困難的地方, 除了這之外, 還有習題。你如何編排你的習題? 一個沒有良好的習題的編排的書, 基本上是不可能做爲教科書, 而且也不可能讓一個人成長。可是編排習題所需要花的時間, 絕對比你寫那個書不知道要多幾倍, 而且你的習題還不能夠抄別人, 因爲有版權的問題, 對不對? 所以我們要了解: 寫一個真正好的書所耗費的心力是巨大的。

我其實寫過書, 我已經寫過好幾本書了, 有時候在我的網頁上或是在同學之間有流傳, 比如微分幾何我有寫過, 代數幾何也有。但是我從來沒有把它們真正地 publish, 主要原因是因爲我的習題都是從別的書上抄來的, 就是說我的習題是引用某本書。我必須要重新去檢視要怎麼樣重新做, 可是我沒有那麼多時間做這個。我當然很希望我未來有機會可以做這樣。事實上在疫情那幾年, 我本來很想把我微分幾何的書弄出來, 但最後還是失敗了; 做了一半, 後來還是失敗。不過寫書非常重要。我也鼓勵所有的同仁, 唯有你真的開始寫書, 你才能夠對自己或對這個領域做出更根本的貢獻。書要好好寫, 不能是一個 lecture note。什麼樣的人可以寫 lecture note? 就是那種最厲害的數學家, 比如說 Milnor, Deligne, Serre 這種。爲什麼? 因爲他的演講的過程中的那些思維, 就已經足以導引你走所有這些路。做習題的重要性要怎麼講?Lecture note 本身的結構如果已經強到可以讓你的思想演進的話, 你不一定要靠習題。但是如果這個 subject 本身已經是一個比較 well-defined 的 subject, 習題才能夠帶領你拓展更寬廣的東西。好比說我最喜歡的一本複變的書是 Whittaker-Watson 的, 它是一百年前的書, 1902。那本書仍然是我最喜歡的書, 除了 Ahlfors 之外。爲什麼我喜歡它? 因爲它的習題裡面全部都是十九世紀的 paper。他把十九世紀所有複變的 paper, 可以寫成習題的都把它編排, 所以你讀那本書, 你等於同時讀了可能大概五十篇 paper 以上。但是它的編排讓你可以在一個學習的狀態下進入這個東西, 所以你會省掉非常多的時間。所以選擇一個好的書極爲重要。當然我們能夠寫一個好的書更重要。我老實說, 台灣數學界到今天爲止, 我不認爲我們有任何一本教科書寫到這種等級, 也許師大可以往這個方向考慮。也許我們應該弄一個獎項來專門鼓勵大家來寫很好的教科書, 因爲這真的太重要了。

聽衆: 金龍, 我再一次謝謝你。我想站在學生的立場。我現在在師大, 有幾個書卷獎的學生跟著我讀書, 我知道感染力很重要。如果他跟你的話, 感染力應該更高了。我再想問就是說, 可不可以爲學生談一下, 因爲我正在考慮說有些學生要出國, 或者是要念研究所, 常常都是在大三大四,

甚至到大四才開始想, 我覺得都太慢。人生在學習過程, 按照你的經驗、這麼樣的豐富的學習, 感染力那麼強, 可以幫我們一下忙說, 在這一方面鼓勵一下學生。當大一學生進來, 微積分、線性代數, 你常常提過很重要, 可是常常我覺得就是說學生知道這種都太慢了。所以不曉得按照你的感染力來幫我們學生打打氣。

答: 我試試看。這個會回到我們對教育的理念。我們建構一個數學系, 建構一個數學教育, 我一直強調, 就像你剛剛說, 我強調微積分、線性代數很重要。這句話, 當然每個人都認同, 可是在我們第一線做研究的教授, 很少有人願意花時間在這事上, 因爲覺得那個東西比較簡單, 然後很花時間, 然後你要面對高三的學生進到大一, 你要教他, 常常不是只是教數學, 還有很多其他的問題。我們做一個大一的老師, 可能變成是一個導師, 還不只是導師, 是心理輔導師。你要做的事情非常之多。可是你不經過那樣, 你是沒辦法帶領這些年輕人。

因爲譬如說我們今天講說應用數學很重要、很好, 矩陣計算, 譬如說以前林文偉在交大, 他到台大來待了幾年, 他說因爲台大有很好的學生, 他想要來試試看。結果他待了幾年之後, 發現台大都沒有人要跟他, 所以他要回去了。那大家思考一下這個問題, 到底是發生什麼事情? 每個人都覺得研究很重要。一個大學教授最重要的是做出新的研究, 這是我們的職責。可是你的職責不是只有這樣。這學校的價值是在於你要帶領年輕的一代走到這條路上, 這也是你的職責。所以你要怎麼樣能夠讓一個人, 在很年輕、在思想還在塑造的過程中, 找到這個學問裡面或者是運用中很重要的方向, 讓他覺得這個問題有大到、重要到他願意 devote 接下來的那麼多年。你要在很早就要讓他見識到厲害的東西。譬如說如果今天大一, 你教線性代數, 上學期到下學期剛開始可能大概就差不多教完, 因爲我們現在教一年。你上學期到下學期, 一開始教完以後, 你可能還有兩個月的時間, 你可以 do anything you want。如果你今天讓一個純數學的老師去教, 譬如他做數論的, 他就開始教什麼 finite field, 他就開始來做 linear algebra over finite field, 就開始搞一些很奇怪的。你不能怪他, 因爲他當然要帶領一些學生來對這個東西感興趣。如果今天遇到的老師做的非常分析, 他可能教到後面就開始偷渡一些泛函分析, 或是線性代數 with topology, 然後突然變成 topological vector space。

同樣的道理, 如果今天一個做計算的老師, 他在計算的世界裡面, 他的矩陣都是寫不下來的那種矩陣, 都是幾萬乘以幾萬的大型矩陣計算, 你爲什麼不在線性代數就去教? 等到全部教完以後, 我們要開始要面對現實世界。我們現在拿一個問題來告訴你, 我要解決這個問題, 我要處理的就是這麼大的矩陣, 那我要怎麼辦? 我們學的這些東西, 手算可以算。It's not working in this kind of application。你要讓一個學生在 18 歲就立下志願要解決真正困難的問題。你讓他過了 18 歲, 那有什麼關係? 18 歲跟 19 歲差不多。沒有。他被人家搶走了, 他被那個教數論的, 或是教代數幾何的, 或是教微分幾何, 或是教分析的, 就是 whatever 那些願意花時間跟他談的那些老師, 他就把他吸引走了。所以這就是我所謂的, 最好的老師真的想要培育出最好的學生, 做最好的研究、值得的研究, 一定要在一開始就紮下這個東西。

我講一個在哈佛大學教書的經驗。哈佛大學給我真正最大的震撼其實並不是它的名氣, 並不是它的這些其他的東西, 它就是一些最簡單的東西。譬如我在哈佛教線性代數, 因爲我們是拿全額獎學金的, 我們必須要去教書。這個教書的結構是什麼呢? 全校的線性代數是由一個老師, 一個大教授 handle 的。這大教授他上前三堂課之後, 接下來就分成十個班, 所以我們每個人都是負責十個班其中一個班, 我班上的學生大概就二十幾個。我們那個大教授是誰呢? David Mumford。David Mumford, 拿過 Fields Medal, 是大數學家, 對不對? 他是偉大的代數幾何學家, 可是人家也教線性代數。他不但教線性代數, 每個禮拜和我們十個人一起吃飯。他很喜歡吃 Chinese food, 所以我們都去買 Chinese lunch box; 在哈佛的那個學生宿舍附近有一個攤子, 我們每次去那裡買。他每次都問我們說, 學生的反應怎麼樣啊? 有沒有人怎麼樣啊? 因爲我們那個教案是重新寫的。是由我們那些 lecturer 一起寫, 然後每次看學生有什麼反應, 就一直改變教材的方式。你知道我第一次才發現到說, 喔, 原來一個偉大的數學家, 他也會做這種事情, 他也跟我們討論這種事情, 而且他把這些大一學生的反應視爲是很重要的。他並不是覺得你是大一, 大一學生的反應一定不重要。沒有。他覺得它很重要, 而且他就是讓我們 feedback 這些東西, 重新去對他的教案做各種改變。這讓我認知到一個真正的偉大的科學家, 或是一個偉大的數學家, 應該是什麼樣子。

我常常談到, 譬如我自己的老師, 丘老師, 他從來沒有在哈佛上的任何一堂課是遲到的。他從來沒有缺過任何一堂課。即使昨天還在歐洲演講, 早上也是搭了飛機回來, 一定趕到我們課堂上。如果他真的做不到, 他一定請假。就這麼簡單的事情。一個教授, 他應該要展現出來的一個正常的 teaching 對學問的價值。如果你今天非常正確地呈現所有這些東西, 學生就跟你一樣會是這樣的價值觀。在台灣, 我想我們過去長久幾十年, 我們都知道很多半大不小的教授, 常常會藉各種理由: 要出國開會, 要做這個, 要做那個, 反正常常都可以遲到早退, 開學可能還不見人, 學期還沒結束就已經跑掉了, 對不對? 一個很落後的學術單位才會是這種樣子。你在一個真正的學術殿堂, 會把每一堂課都視爲是一個非常重要的師生交流的一個場合。唯有用這種方式, 你才能夠感染你的年輕人, 你才能夠讓他相信這個學問有那個價值。

我不知道這樣有沒有回答你的問題。在數學上任何的領域走到最尖端都是一樣困難。老實說數學也沒有什麼高低。你說你今天是做組合的, 你今天是做什麼分析的, 你今天是做什麼, 都是跟全世界的人在比。你不管在做任何東西, 只要你走到最頂端, 反正就是大家都不會, 對不對? 走到最頂端之後, 不管那個領域是什麼, 都會陷入一個很焦灼的狀態。我們最需要的東西是鬥志, 是學生對這個東西的興趣。他有意志力要去解決這樣的問題, 那是前提。每個領域當然要想辦法去招攬自己的下一代, 對不對? 那麼你要用什麼方式去讓他 get interested? 訓練他是下一步。我覺得第一步就是你要讓他提振很高的對學問的興趣, 而你絕對不要太晚。我是認爲最好是高中、大一。大二是最晚的。晚過大二, 可以叫他轉行了。I'm serious。因爲過了大二之後, 你所有該有的基礎訓練已經結束。我們數學最重要的是什麼? 微積分、線性代數, 對不對? 再

來是代數, 幾何, 還有分析, 也許還有微分方程, 對不對? 我們現在大部分的數學系的課都在大三上就停了。所有的必修課都停在大三上。所以一個人最終要去決定他的下一步的走向是在大三上。你要怎麼樣能夠在那個時間點找到自己的興趣? 你一定要靠你非常豐富的課程才有辦法做到。課程如果還做不到, 就要透過其他的活動, 比如說學生的活動, 或是說系上給學生安排的各種活動, 校友的演講或是各種演講, 或者是晚上的學生自己的 seminar 或是什麼。反正就是在很短的時間之內, 你要讓大家各就各位, 準備開始戰鬥, 對不對?

然後接下來才有就是你一定要站在那個崗位上。你再辛苦, 反正你也會願意去做, 因爲那就是你自己決定的崗位。至於你要把你自己塞到哪個位置, 那是自己決定的。對於老師來講的話, 你希望你這邊有最好的學生, then you have to do something, 對不對? 如果永遠都不願意去教大一的課, 永遠都不願意教大二的課, 那我告訴你, 你的學生早就被人家搶光了。對。那些有 motivation 的學生早就已經被吸引走了, 哪輪得到你。你說我大三再來去教這些什麼比較進階的什麼複變啊, 幾何啊, 沒有錯, 你教得很好, 學生也會很開心, 他會謝謝你, 但他會去跟別的老師。他會覺得你的課幫他提供了很好的訓練, 但是他已經早就心在另外一個 group。我覺得我一開始在來這裡之前, 會說師大真的是有一個很好的 position, 教育上可以扮演很大的角色。師大的編制也是比較大, 所以我認爲它絕對有一個很好的 position 來發展多樣的數學。(全文完)

本文逐字稿由數學傳播工作小組根據演講錄影檔以及投影片製作提供。後續校稿工作由江宇哲同學 (台大數學系博士班) 以及講者合力完成。

—演講者王金龍任教於國立台灣大學數學系—